ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES

145

EXPOSÉS D'ANALYSE GÉNÉRALE

Publiés sous la direction de

MAURICE FRÉCHET

Professeur à la Sorbonne

II

PROPRIÉTÉS DES ESPACES ABSTRAITS LES PLUS GÉNÉRAUX

Ensembles ouverts, fermés, denses en soi, clairsemés. Connexion.

PAR

Antoine APPERT

Docteur ès-Sciences Mathématiques

Préface de M. FRÉCHET

PARIS

HERMANN & C^ie, ÉDITEURS

6, Rue de la Sorbonne, 6

1934

ACTUALITÉS SCIENTIFIQUES ET INDUSTRIELLES
145

EXPOSÉS D'ANALYSE GÉNÉRALE

Publiés sous la direction de

MAURICE FRÉCHET

Professeur à la Sorbonne

II

PROPRIÉTÉS DES ESPACES ABSTRAITS LES PLUS GÉNÉRAUX

Ensembles ouverts, fermés, denses en soi, clairsemés. Connexion.

PAR

Antoine APPERT

Docteur ès-Sciences Mathématiques

Préface de M. FRÉCHET

PARIS
HERMANN & Cie, ÉDITEURS
6, Rue de la Sorbonne, 6

1934

PRÉFACE

Au premier abord, l'étude des espaces abstraits peut apparaître d'une généralité excessive. C'est pourquoi j'ai rappelé — dans la Préface au premier des Exposés d'Analyse Générale : L'Arithmétique de l'infini, — que la généralité des « espaces » abstraits est encore dépassée par celle des « ensembles » abstraits. Or, ceux-ci sont à la base de la théorie des nombres ordinaux et cardinaux, théorie maintenant entrée dans le domaine classique de la Science.

Si l'on veut se conformer à l'ordre logique de généralité décroissante, il convient donc de faire suivre l'Arithmétique de l'infini de l'étude des propriétés des espaces abstraits les plus généraux. C'est l'objet même de cet ouvrage.

En l'écrivant, M. Appert devait nécessairement faire connaître les résultats de ses intéressantes recherches (1). *Mais ces résultats, — qui venaient compléter un ensemble déjà important de résultats antérieurement acquis par d'autres auteurs, — ne pouvaient être bien appréciés et compris que si ces résultats antérieurs étaient rappelés. On aurait pu se borner, — comme je l'ai fait dans mon livre sur « Les espaces abstraits », — à donner les énoncés de ces résultats et à renvoyer, pour leurs démonstrations, aux mémoires originaux. Seulement ces démonstrations sont dispersées dans différents périodiques, et elles s'enchevêtrent les unes dans les autres. Il a donc paru qu'on rendrait grand service à ceux qui s'intéressent à la théorie des espaces abstraits*

(1) La contribution personnelle de M. Appert est résumée aux pages VIII-XI de l'Avant-Propos qui suit. Les théorèmes qui lui sont dûs sont distingués dans le cours de l'ouvrage, sur ma demande, par des astérisques.

en rassemblant dans un même ouvrage de référence, comme celui-ci, non seulement les énoncés anciens et nouveaux, mais les démonstrations des uns comme des autres. Nous devons être reconnaissants à M. Appert d'avoir bien voulu, en rédigeant cet ouvrage, se donner cette seconde tâche aussi bien que la première. Il y a d'ailleurs fort bien réussi : le lecteur appréciera la rigueur et la clarté de son Exposé.

Je voudrais maintenant préciser un peu la matière traitée.

On a réuni ici un grand nombre de celles des propriétés de l'espace euclidien (et des fonctions ordinaires) qui peuvent s'étendre à des espaces abstraits (ou à des fonctions abstraites). Certaines propriétés ne sont généralisables qu'aux espaces abstraits introduits dans ma Thèse : ceux où l'on peut définir une limite ou une distance. On a laissé presque complètement de côté ces propriétés, et on s'est borné, en principe, à celles qui s'étendent à des espaces beaucoup plus généraux.

M. Appert s'est principalement occupé des espaces que j'ai définis pour la première fois en 1917 sous le nom d'espaces ($\mathfrak{V}$). *Cette limitation présente un double avantage. Elle met d'abord en évidence que l'énorme extension en généralité réalisée depuis ma Thèse par l'introduction des espaces* ($\mathfrak{V}$) *— et encore assez peu connue —, si elle s'est nécessairement un peu accomplie aux dépens de l'efficacité, a laissé encore la part belle à celle-ci. Cette même limitation du sujet permet, en outre, de s'écarter un peu moins du type moyen de la collection des Actualités Scientifiques, ouvrages dont l'exiguïté est l'un des principaux mérites. Et pourtant, il a fallu étendre à deux tomes, cette étude des espaces* ($\mathfrak{V}$). *Mais qu'entendons-nous par espaces* ($\mathfrak{V}$) *?*

Les espaces ($\mathfrak{V}$) *sont les espaces où, à chaque élément (ou point), a, est attachée une famille d'ensembles* V_a absolument quelconques *composés de points de cet espace et où ces ensembles* V_a *sont considérés comme* voisinages du point *a. Un point a est alors considéré comme infiniment voisin d'un ensemble* E *de points de l'espace ou — en termes plus modernes — comme faisant partie de l'ensemble dérivé* E' *de* E, *ou encore comme point d'accumulation de* E, *si, à tout voisinage de a appartient au moins un point (distinct de a) de* E.

Une telle définition des points d'accumulation était déjà employée dans l'espace linéaire en prenant pour voisinage de a, un intervalle de milieu a. Elle s'étendait aussi naturellement aux espaces abstraits, *nommés espaces* ($\mathcal{E}$) *dans ma Thèse — et que j'appelle maintenant espaces distanciés — en prenant pour voisinages de a les « sphéroïdes »*

de centre a. Elle avait aussi été employée plus tard par M. Hausdorff dans son remarquable ouvrage « Mengenlehre » paru en 1914, pour définir des espaces plus généraux encore que les espaces distanciés. Mais dans tous ces cas, les familles de voisinages étaient soumises à des conditions soit explicites, comme les conditions A), B), C), D) *de M. Hausdorff, soit implicites comme celles qui résultent de l'existence d'une distance. La notion d'un voisinage* non conditionné *qui caractérise les espaces* ($\mathcal{V}$) *offre un certain intérêt philosophique en montrant combien est vaste le domaine possible de la topologie. Le risque à courir était d'aboutir à des espaces si généraux que l'extension des propriétés euclidiennes à ces espaces en devînt à peu près impossible. Assurément cette extension n'est et ne devait pas être totale comme il a été déjà observé plus haut. Pourtant, peu de temps après la publication de la définition des espaces* ($\mathcal{V}$), *quelques auteurs (dont moi-même), ont pu étendre à l'espace* ($\mathcal{V}$) *un assez grand nombre des propriétés euclidiennes. M. Appert rappelle ces propriétés et en ajoute ici d'autres.*

En étudiant les Tomes I et II de son ouvrage, on sera peut-être même surpris de voir combien on peut tirer de la simple donnée de voisinages absolument quelconques.

Ce fait mériterait l'attention de ceux qui s'intéressent aux fondements de la géométrie. Mais le présent ouvrage présente aussi une autre utilité, celle d'alléger la préparation et la composition d'un Exposé analogue où se trouveront rassemblées les démonstrations éparses de propriétés de ceux des espaces abstraits les plus aptes aux applications : les espaces distanciés et, plus particulièrement, les espaces vectoriels distanciés.

Maurice Fréchet.

AVANT-PROPOS

Pour qu'un ensemble P d'objets de nature quelconque puisse être considéré comme un « espace », il est nécessaire de s'être donné non seulement les éléments ou « points » de l'ensemble P, mais aussi d'avoir précisé certaines relations de proximité ou de situation de ces points les uns par rapport aux autres. Pour donner une forme précise à cette idée, nous considérerons un « espace » comme défini si l'on s'est donné d'une part l'ensemble P de ses points, et d'autre part une opération K, appelée dérivation, faisant correspondre à tout ensemble E de points de P, l'ensemble $E' = K(E)$ des points qui seront considérés comme infiniment voisins de l'ensemble E. L'ensemble E′ sera dit le *dérivé* de E ou l'ensemble des « points d'accumulation » de E. Si on laisse indéterminés dans une mesure plus ou moins large l'ensemble P et l'opération K, l'étude de l'espace envisagé fournira les propriétés communes à toute une classe d'espaces quand on fait abstraction de leurs différences ; d'où le nom d'*espace abstrait* donné dans ce cas au système (P, K).

L'objet de cet ouvrage est l'étude des propriétés des espaces abstraits les plus généraux, c'est-à-dire de ceux où l'opération K est soumise à des conditions aussi peu restrictives que possibles. Parmi ceux-ci nous nous occuperons principalement des espaces $(\mathcal{V})$ introduits par M. Fréchet au moyen de la notion de famille de voisinages attachée à chaque point de l'espace. On peut également définir un espace $(\mathcal{V})$ comme un système (P,K) dont on suppose seulement qu'il satisfait aux deux conditions suivantes, « la propriété pour un point a d'être infiniment voisin d'un ensemble E

ne doit dépendre que des éléments de E distincts de *a* », et « tout point infiniment voisin d'une partie d'un ensemble est infiniment voisin de cet ensemble ». Ces deux conditions paraissent si naturelles qu'il semble qu'un système (P,K) ne satisfaisant pas à ces conditions, ne mériterait plus guère le nom d'espace.

Le lecteur trouvera dans cet ouvrage un exposé d'ensemble des propriétés des espaces ($\mathcal{V}$). Nous ne prétendons pas, il est vrai, avoir passé en revue dans les pages qui vont suivre, tous les résultats se rattachant à la théorie des espaces ($\mathcal{V}$) et qui ont pu être publiés. Nous avons dû nous borner à un certain nombre de questions importantes que nous avons traitées à fond et qui constituent par leur variété une vue d'ensemble des propriétés de ces espaces.

M. Fréchet, puis MM. Chittenden, Tychonoff et Vedenissoff, etc., avaient déjà étendu aux espaces ($\mathcal{V}$) beaucoup de propriétés d'espaces moins généraux tels que les espaces accessibles, les espaces de Hausdorff et les espaces distanciés. Nous avons pu compléter leur travail sur un certain nombre de points se rattachant en particulier aux notions d'ensemble connexe et bien enchaîné et à la notion de transformation continue. De plus nous avons été amené à constater qu'un grand nombre de propriétés des espaces abstraits plus particuliers que nous venons d'énumérer, propriétés qui ne s'étendent pas, ou ne s'étendent qu'en se compliquant beaucoup, aux espaces ($\mathcal{V}$) les plus généraux, s'étendent cependant sous une forme simple aux espaces ($\mathcal{V}$) satisfaisant à la condition suivante :

α) *L'opération de fermeture* $\overline{E} = E + E'$ *est telle que* $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$.

Les simplifications dues à la réalisation de cette condition α) se font sentir dans toutes les parties de la théorie des espaces ($\mathcal{V}$), mais principalement dans toutes les questions se rattachant à la notion d'ensemble compact (ensembles qui généralisent les ensembles euclidiens bornés). En particulier, nous avons pu formuler, dans les espaces ($\mathcal{V}$) vérifiant α), diverses *conditions simples qui sont à la fois nécessaires et suffisantes pour que chaque fonctionnelle semi-continue supérieurement sur un ensemble* E *atteigne un maximum sur* E. Ces conditions sont nouvelles à notre connaissance, même dans le cas plus particulier des espaces accessibles et des espaces de Hausdorff.

La condition $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$ n'est pas absolument nouvelle car elle avait déjà été envisagée par M. C. Kuratowski (1). Nous croyons toutefois avoir mis en évidence l'importance vraiment fondamentale de cette condition dans la topologie des espaces abstraits. En particulier, nous avons indiqué pour la première fois le rôle simplificateur de cette condition dans la théorie de la compacité et le fait qu'elle permet dans ce cas de *diminuer le nombre des définitions admises.* Nous n'avons d'ailleurs fait presque aucun usage du *Mémoire* (2) de M. Kuratowski qui s'était posé des problèmes différents des nôtres.

Dans un autre ordre d'idées, nous nous sommes également occupé des espaces ($\mathfrak{V}$) où la dérivation est distributive (3), c'est-à-dire où $(E + F)' = E' + F'$; cette étude nous a conduit à plusieurs résultats qui sont nouveaux à notre connaissance, du moins dans les espaces très généraux que nous envisageons. Cette condition de distributivité est loin de jouer l'important rôle simplificateur de la condition $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$; toutefois nous avons pu constater que les espaces ($\mathfrak{V}$) satisfaisant à la fois à ces deux conditions jouissent de presque toutes les propriétés des espaces accessibles de M. Fréchet, tout en étant plus généraux et d'une définition plus simple.

Nous consacrons le VIIIe Chapitre de cet ouvrage à l'étude des ordres de séparabilité. La question avait déjà été abordée par M. Haratomi dans le cas des espaces distanciés (4) ; nous l'avons reprise à l'aide de définitions différentes et en nous plaçant dans le cas beaucoup plus général des espaces ($\mathfrak{V}$). Ces nouvelles définitions ont d'ailleurs l'avantage de fournir dans les espaces distanciés des résultats plus simples que ceux de M. Haratomi. Nos recherches sur les ordres de séparabilité ont abouti, entre autres résultats nouveaux, à la définition pour tout espace ($\mathfrak{V}$) d'un nombre car-

---

(1) « Sur l'opération $\overline{A}$ de l'Analysis situs » Fund. Math., t. III, p. 182-199.

(2) La plupart de nos propres résultats concernant la condition $\overline{\overline{E}} = \overline{E}$ avaient déjà été obtenus et communiqués à M. Fréchet quand celui-ci nous a fait connaître ce *Mémoire*.

(3) Ces espaces ne sont autres que les espaces ($\mathfrak{V}$) satisfaisant à la deuxième condition proposée par M. F. Riesz pour la notion de point d'accumulation (« Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre. » *Atti del IV Congresso internazionale dei Matematici*, Roma, vol. II, p. 19).

(4) « Über höherstufige Separabilität und Kompaktheit » *Japanese Journ. of math.*, vol. VIII, 1931, p. 113-141.

dinal transfini $\aleph_\xi$ appelé *ordre* de cet espace. Alors beaucoup de propriétés des ensembles euclidiens où intervient le nombre cardinal $\aleph_0$ des ensembles dénombrables — et en particulier diverses formes du théorème de CANTOR-BENDIXSON — s'étendent sans changement aux espaces ($\mathfrak{V}$) les plus généraux à la condition d'y remplacer $\aleph_0$ par l'ordre $\aleph_\xi$. Nous avons même obtenu une généralisation du théorème de CANTOR-BENDIXSON qui fournirait dans l'espace euclidien des résultats intéressants à la condition d'admettre que l'hypothèse du continu ne soit pas exacte.

Enfin, pour ce qui est du maximum des fonctionnelles continues et semi-continues sur un ensemble abstrait, nous avons pu établir que plusieurs théorèmes fondamentaux indiquant les cas où ce maximum existe et où il est atteint, ne sont que des cas particuliers de l'invariance d'une certaine propriété (propriété que peut avoir un ensemble d'être ce que nous appelons compact en soi au sens large) relativement à toute transformation continue. Il y a là un exemple intéressant de propositions d'Analyse fonctionnelle qui ne sont que des cas particuliers d'un théorème plus simple d'Analyse générale.

Il nous a paru avantageux de diviser cet ouvrage en deux Tomes : le Tome I comprend l'étude des ensembles ouverts, fermés, denses en soi et clairsemés, ainsi que des propriétés de connexion ; le Tome II comprend l'étude des notions de compacité et de séparabilité, ainsi que des transformations et fonctionnelles. Ces deux Tomes présentent des différences assez tranchées non seulement à cause des sujets traités, mais aussi à cause des modes de raisonnement employés. C'est ainsi que beaucoup de propositions empruntées à la théorie des nombres cardinaux transfinis et inutiles à l'intelligence du Tome I, interviennent presque constamment dans le Tome II et nous ont paru devoir être résumées au début de ce dernier Tome.

A ce propos, nous tenons à prévenir le lecteur que nous admettons l'axiome de ZERMELO avec toutes ses conséquences. D'ailleurs, et nous ne sommes pas le seul, nous avons le cerveau fait de telle manière que cet axiome, conçu comme un simple axiome d'existence, nous apparaisse comme tout à fait évident, d'une évidence du même ordre que celle du principe de non-contradiction.

Nous ne saurions trop insister sur l'intérêt que présente pour la philosophie des mathématiques, la théorie des espaces abstraits

les plus généraux. De même que l'Analyse vectorielle traite des propriétés communes aux champs de forces, de vitesses, de tourbillons, aux champs magnétiques et électriques, etc., de même l'étude des propriétés des espaces abstraits les plus généraux fournit le substrat commun à un grand nombre de théories analytiques et géométriques. De plus, comme ces propriétés doivent être démontrées en faisant appel à des hypothèses aussi peu restrictives que possibles, d'autant moins restrictives que l'espace est plus général, et que l'intuition géométrique, tout en jouant un grand rôle dans la recherche, doit alors être absolument éliminée dans l'établissement de la preuve, l'étude des propriétés envisagées et de leurs démonstrations est débarrassée de beaucoup d'éléments inutiles et permet de mieux pénétrer ce qu'il y a en elles de vraiment essentiel.

On trouverait une bibliographie très complète des publications se rapportant aux espaces abstraits, du moins de celles antérieures à 1928, à la fin de l'Ouvrage de M. FRÉCHET : « Les espaces abstraits et leur théorie considérée comme introduction à l'Analyse générale » (Paris, Gauthier-Villars, 1928). Nous aurons fréquemment l'occasion de renvoyer à cet ouvrage que nous désignerons par l'abréviation E. A.

Avant de terminer cette trop longue introduction, nous tenons à exprimer nos sentiments de bien vive reconnaissance à M. FRÉCHET, le créateur de la théorie des espaces abstraits, pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à nos recherches et pour les précieux conseils par lesquels il les a guidées.

Antoine APPERT.

(Versailles, décembre 1933.)

NOTE SUR LA DISPOSITION TYPOGRAPHIQUE EMPLOYÉE

Nos Chapitres et nos § seront numérotés avec des chiffres romains : Chapitres I, II, III, ..., § I, § II, § III, ... Quand nos renvois ne feront pas mention du Chapitre, il s'agira toujours de renvois à l'intérieur d'un même Chapitre.

Nos théorèmes seront numérotés avec des chiffres arabes 1), 2), 3), ..., le numérotage commençant par 1) au début de chaque Chapitre.

Comme nous démontrerons beaucoup de résultats déjà obtenus par d'autres auteurs, nous croyons utile de signaler par un * les résultats qui sont nouveaux à notre connaissance.

Enfin nous devons prévenir le lecteur que, toutes les fois que nous énoncerons une définition ou un théorème sans indiquer dans l'énoncé même à quel espace cette définition ou ce théorème s'applique, il sera toujours sous-entendu qu'il s'applique à l'espace $(\mathfrak{V})$ le plus général. D'ailleurs cette convention n'interviendra effectivement qu'à partir du Chapitre V.

TOME I

ENSEMBLES OUVERTS, FERMÉS, DENSES EN SOI, CLAIRSEMÉS. CONNEXION

CHAPITRE I

LES ESPACES TOPOLOGIQUES ET LES ESPACES ($\mathfrak{V}$)

Notre but dans ce Chapitre est d'une part de définir les *espaces topologiques* qui peuvent être considérés comme les espaces abstraits de généralité maxima, et d'autre part de définir les *espaces* ($\mathfrak{V}$) dont la généralité est encore telle qu'ils contiennent comme cas particuliers tous les espaces abstraits dont l'étude ait paru jusqu'ici présenter quelque utilité. Pour cela il sera bon de rappeler quelques notions élémentaires de théorie des ensembles ; c'est ce que nous ferons dans les § I, II et III qui vont suivre.

§ I. **Notations.** — Soient E, F, G,..... des ensembles dont les éléments sont des objets de nature quelconque.

Pour exprimer qu'un objet p est *élément* d'un ensemble E nous écrirons avec M. G. Peano

$$p \in \mathrm{E}.$$

Nous aurons à considérer des ensembles dont les éléments sont eux-mêmes des ensembles ; dans ce cas, au lieu de dire « ensemble d'ensembles », nous dirons souvent « famille d'ensembles ».

Quand deux ensembles E et F ont les mêmes éléments nous dirons qu'ils sont identiques et nous écrirons

$$\mathrm{E} = \mathrm{F}.$$

Si E et F ne sont pas identiques nous écrirons $E \neq F$.

Nous désignerons par (a) l'ensemble formé d'un seul élément qui est l'objet a.

Nous désignerons *l'ensemble vide* par 0. La relation $E \neq 0$ signifie que l'ensemble E contient au moins un élément.

Si tout élément de l'ensemble E est élément de l'ensemble F, nous écrirons

$$E \subset F \quad \text{ou} \quad F \supset E.$$

Nous dirons alors que E est un *sous-ensemble* de F ou est contenu dans F ou est une partie de F ; nous dirons alors aussi que F contient E. La relation $E \subset F$ est appelée *inclusion.*

Il sera commode pour la généralité de certains énoncés, de considérer l'ensemble vide comme un sous-ensemble de tout ensemble.

§ II. **Opérations sur les ensembles.** — Considérons des ensembles E, F, G,...

L'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à l'un au moins des ensembles E, F, G,... est appelé *somme* de ces ensembles et sera désigné par

$$E + F + G + \cdots.$$

L'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à la fois à tous les ensembles E, F, G,... est appelé *produit* de ces ensembles et sera désigné par

$$EFG\cdots$$

ou encore par

$$E \cdot F \cdot G \cdots.$$

Nous désignerons aussi ce produit par la locution « ensemble commun ou partie commune aux ensembles E, F, G,..... »

L'ensemble de tous les éléments qui appartiennent à un ensemble E sans appartenir à un ensemble F est appelé *différence* de ces deux ensembles et sera désigné par

$$E - F.$$

Deux ensembles E et F sont *disjoints* s'ils n'ont aucun élément commun, c'est-à-dire si $EF = 0$.

§ III. **Complémentaire d'un ensemble.** — Si $E \subset P$ on pose par définition :

$P - E =$ complémentaire de E par rapport à P.

Dans les développements qui suivront, nous aurons constamment à considérer des sous-ensembles E, F, G,..... d'un certain ensemble P *donné une fois pour toutes.* P *sera l'ensemble des éléments ou points d'un certain espace* ; E, F, G,... seront des ensembles de points de cet espace. Alors, quand nous parlerons de complémentaires, il s'agira toujours, sauf mention expresse du contraire, de complémentaires par rapport à P, c'est-à-dire par rapport à l'espace tout entier.

Nous poserons pour tout ensemble E de points de P :

$$C(E) = P - E = \text{complémentaire de } E.$$

Pour tous les sous-ensembles de l'ensemble donné P on a les propriétés suivantes :

$$E \cdot C(E) = 0, \qquad C[C(E)] = E.$$

On a les théorèmes classiques suivants, dont la démonstration est immédiate :

Le complémentaire d'un produit est la somme des complémentaires des facteurs.

Le complémentaire d'une somme est le produit des complémentaires des termes de cette somme.

La relation $E \subset F$ équivaut à

$$C(E) \supset C(F).$$

On a l'identité

$$E - F = E \cdot C(F),$$

d'où

$$C(E - F) = C(E) + F.$$

Toutes ces propriétés nous serviront souvent dans la suite.

§ IV. **Les espaces topologiques.** — On peut considérer un espace abstrait comme défini si l'on s'est donné d'une part l'ensemble P de ses « points », et d'autre part une opération

$$E' = K(E)$$

faisant correspondre à chaque sous-ensemble E de P l'ensemble E' des points qui seront considérés comme *infiniment voisins* de

E. L'ensemble E′ sera dit le *dérivé* de E ou l'ensemble des *points d'accumulation* de E ; l'opération K sera appelée *l'opération de dérivation.*

Notre but est de formuler la conception d'un espace abstrait dont la généralité soit en quelque manière maxima. Pour cela on pourrait songer à laisser tout à fait arbitraires l'ensemble P et l'opération K ; mais il nous a semblé qu'il y a deux conditions telles que, si elles n'étaient pas réalisées, les points de E′ = K (E) ne correspondraient plus en rien à la notion intuitive de points infiniment voisins de E. Ces conditions sont les suivantes :

a) *L'ensemble* E′ (*qui est un sous-ensemble de* P *et qui peut être vide*) *est défini et unique pour chaque sous-ensemble non vide* E *de* P.

b) *Pour qu'un point a appartienne à* E′ *il faut et il suffit que* E — (*a*) *soit non vide et que a appartienne à* [E — (*a*)]′.

Cette condition *b*) peut s'exprimer d'une manière intuitive en disant que la propriété pour un point *a* d'être infiniment voisin d'un ensemble E ne doit dépendre que des éléments de l'ensemble E — (*a*) supposé non vide.

Ces remarques nous amènent à adopter [1] la définition suivante d'un espace topologique, entendant par espace topologique l'espace abstrait le plus général :

Un espace topologique est un *système* (P, K) constitué par un ensemble arbitrairement choisi P (qui est l'ensemble des « points » de l'espace) et par une opération E′ = K (E) dont on suppose seulement qu'elle satisfait aux conditions *a*) et *b*).

Il nous sera commode d'introduire dans les espaces topologiques le dérivé de l'ensemble vide ; ce dérivé devra être considéré comme *vide* en vertu de *b*).

§ V. **L'intérieur d'un ensemble.** — Nous adoptons la définition suivante dans l'espace topologique le plus général :

Un point *a* est *intérieur* à un ensemble E s'il appartient à E tout en n'étant point d'accumulation d'aucun sous-ensemble de C(E).

L'intérieur d'un ensemble sera l'ensemble des points qui lui sont intérieurs.

Cette définition apparaît comme une traduction très naturelle

(1) Avec M. Fréchet (E. A., p. 167-168).

de la notion intuitive d'« intérieur ». Elle peut s'exprimer par l'identité :

$$(\text{intérieur de E}) = E - (\text{somme des dérivés des sous-ensembles de } C(E)).$$

Remarque. — Il résulte de notre définition que, dans tout espace topologique, on a la propriété suivante :

Tout point intérieur à une partie d'un ensemble est intérieur à cet ensemble.

Autrement dit l'hypothèse que

$$E \subset F$$

entraîne que

$$(\text{intérieur de E}) \subset \text{intérieur de F}.$$

§ VI. **La condition 1° de F. Riesz** [1]. — Nous appellerons ainsi la condition suivante :

1° *de F. Riesz. Pour deux ensembles quelconques* E *et* F *l'hypothèse que* $E \subset F$ *entraîne que* $E' \subset F'$.

Puisque nous considérons les points d'accumulation d'un ensemble comme les points infiniment voisins de cet ensemble, nous pouvons exprimer la condition 1° de F. Riesz sous la forme intuitive suivante : tout point infiniment voisin d'une partie d'un ensemble est infiniment voisin de cet ensemble.

Dans un espace topologique vérifiant la condition 1° de F. Riesz notre définition de l'intérieur d'un ensemble peut s'exprimer par l'identité suivante plus simple que celle du § précédent :

$$(\text{intérieur de E}) = E - [C(E)]'.$$

§ VII. **Les espaces** ($\mathfrak{V}$) [2]. — Par définition un *espace* ($\mathfrak{V}$) est un système (P, K) où l'opération de dérivation K satisfait à la condition suivante :

v) *Il est possible d'associer à chaque point a de* P *une famille* $\{V_a\}$ *d'ensembles* V_a *de points de* P *de telle manière que :*

La condition nécessaire et suffisante pour qu'un point a soit point

---

(1) Pour les conditions de M. F. Riesz, voir E. A., p. 181.

(2) C'est à M. Fréchet (E. A., p. 172-173 et p. 179) que sont dûs l'introduction des espaces ($\mathfrak{V}$) et presque tous les résultats de ce Chapitre I.

d'accumulation d'un ensemble E *de points de* P *est que chaque* V_a *contienne au moins un point de* E *distinct de* a.

Les V_a seront appelés *les voisinages de* a ; la famille $\{V_a\}$ sera la famille des voisinages de a.

Il résulte de cette définition qu'un espace ($\mathfrak{V}$) est bien défini si l'on s'est donné d'une part l'ensemble P de ses points, et d'autre part si l'on a associé à chaque point a de P une famille *arbitrairement choisie* de sous-ensembles de P, ces sous-ensembles étant considérés comme les voisinages de a. La donnée des voisinages détermine en effet l'opération de dérivation.

Remarque I. — On constate sans peine que la condition v) entraîne les conditions a) et b) imposées dans tout espace topologique. Les espaces ($\mathfrak{V}$) sont donc certains espaces topologiques.

Remarque II. — Nous considérons l'opération de dérivation K comme l'essentiel du concept d'*espace*. Nous sommes donc amené à considérer deux espaces ($\mathfrak{V}$) comme identiques s'ils sont composés des mêmes points et si l'opération K est la même dans ces deux espaces, ceci même dans le cas où cette opération serait définie par l'intermédiaire de familles de voisinages différentes.

Par exemple, dans l'espace euclidien à trois dimensions, prenons pour voisinages de chaque point a les sphères de centre a. Alors la définition habituelle des points d'accumulation des ensembles de points de l'espace euclidien nous sera fournie par la condition v). Mais la même définition des points d'accumulation sera obtenue en prenant comme voisinages d'un point quelconque a les cubes de centre a, ou les ellipsoïdes de centre a, etc...

Nous dirons que deux familles de voisinages d'un point a, $\{V_a\}$ et $\{W_a\}$, sont *équivalentes* si elles définissent la même opération de dérivation des ensembles.

Nous donnerons au § IX une condition nécessaire et suffisante pour que deux familles de voisinages d'un point a soient équivalentes.

Remarque III. — Soit $\{V_a\}$ une famille de voisinages de a. Nous obtenons évidemment une famille équivalente en remplaçant chaque V_a par $V_a + (a)$. Nous pouvons donc supposer sans inconvénient que *chaque point* a *appartient à tous ses voisinages. C'est ce que nous supposerons toujours dans la suite.*

§ VIII. **Identité des espaces ($\mathfrak{V}$) et des espaces topologiques vérifiant la condition 1° de F. Riesz.** — Donnons-nous un espace topologique (P, K) vérifiant la condition 1° de F. Riesz, et soit a un point quelconque de cet espace. Posons

$$\{ I_a \} = \text{famille de tous les ensembles } I_a \text{ auxquels } a \text{ est intérieur.}$$

Je vais montrer que $\{ I_a \}$ peut être considérée comme une famille de voisinages de a au sens de la condition v). Soit en effet E un ensemble quelconque de points de l'espace considéré ; nous avons deux cas possibles :

1° *cas : a est point d'accumulation de* E.

Je dis qu'alors tout I_a contient au moins un point de E distinct de a. En effet dans le cas contraire il existerait un I_a vérifiant

$$[E - (a)] \cdot I_a = 0.$$

Or nous devons avoir, en vertu de la condition b) imposée à tout espace topologique,

$$a \in [E - (a)]'.$$

Donc a serait point d'accumulation d'un sous-ensemble de C (I_a), et, par conséquent, a ne serait pas intérieur à I_a contrairement à l'hypothèse.

2° *cas : a n'est pas point d'accumulation de* E. Posons alors

$$I = C(E) + (a) ;$$

on a

$$C(I) = E - (a),$$

$$(\text{intérieur de } I) = I - [E - (a)]'.$$

a appartient à I, et, en vertu de la condition b), a n'appartient pas à $[E - (a)]'$; donc a est intérieur à I. Par conséquent l'ensemble $I = C(E) + (a)$ est un I_a qui ne contient évidemment aucun point de E distinct de a. Donc l'hypothèse que a n'est pas point d'accumulation de E entraîne l'existence d'un I_a ne contenant aucun point de E distinct de a.

Nous concluons de l'examen des deux cas 1° et 2° que la condition nécessaire et suffisante pour que a soit point d'accumulation d'un ensemble E de points de l'espace considéré est que tout I_a contienne au moins un point de E distinct de a. Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

Tout espace topologique (P, K) *satisfaisant à la condition 1° de F. Riesz est un espace* ($\mathfrak{V}$), *et on peut y prendre comme famille de voisinages d'un point quelconque a la famille* $\{I_a\}$ *des ensembles* I_a *auxquels a est intérieur.*

Réciproquement tout espace ($\mathfrak{V}$) est un espace topologique vérifiant la condition 1° de F. Riesz. On voit en effet de suite que la condition ν) implique que tout point d'accumulation d'une partie d'un ensemble est point d'accumulation de cet ensemble.

Nous pouvons donc conclure qu'*il y a identité entre un espace* ($\mathfrak{V}$) *et un espace topologique vérifiant la condition* 1° *de F. Riesz.*

§ IX. **Familles de voisinages équivalentes.** — Démontrons le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux familles $\{V_a\}$ *et* $\{W_a\}$ *de voisinages de a soient équivalentes est que tout voisinage* V_a *contienne un voisinage* W_a *et réciproquement.*

Il est bien entendu dans cet énoncé que le point a appartient par hypothèse à tous ses voisinages V_a et W_a.

Démonstration. 1) Supposons remplie la condition, tout V_a contient un W_a et réciproquement. Si alors tout W_a contient un point de E distinct de a, il en est de même pour tout V_a ; et réciproquement si tout V_a contient un point de E distinct de a, il en est de même pour tout W_a. Les familles $\{V_a\}$ et $\{W_a\}$ sont par conséquent équivalentes.

2) Supposons au contraire que la condition, tout V_a contient un W_a et réciproquement, ne soit pas remplie. Alors il existe, par exemple, un V_a, que je désigne par V_a^0, ne contenant entièrement aucun W_a. Alors tout W_a contient au moins un point de $C(V_a^0)$, et ce point est nécessairement distinct de a.

Ainsi, relativement à l'opération de dérivation définie par la famille $\{W_a\}$, a est point d'accumulation de $C(V_a^0)$; au contraire, relativement à l'opération de dérivation définie par la famille $\{V_a\}$, a n'est pas point d'accumulation de $C(V_a^0)$. Les familles $\{V_a\}$ et $\{W_a\}$ ne sont donc pas équivalentes.

C. Q. F. D.

§ X. **Relations entre les notions d'intérieur et de voisinage.**

Théorème. La condition nécessaire et suffisante pour que, dans un espace ($\mathfrak{V}$), *une famille* $\{V_a\}$ *d'ensembles* V_a *puisse être considérée*

comme une famille de voisinages de a est que les deux conditions suivantes soient remplies :

1) *a est intérieur à chaque* V_a.

2) *Pour tout ensemble* E *auquel a est intérieur il existe un* V_a *appartenant entièrement à* E.

Cette condition est intéressante car les points intérieurs à un ensemble ont été définis en termes ne faisant intervenir que l'opération de dérivation.

Démonstration. — Posons comme plus haut :

$\{I_a\}$ = famille de tous les ensembles I_a auxquels a est intérieur.

Nous avons vu que $\{I_a\}$ peut être prise comme famille de voisinages de a. Donc une condition nécessaire et suffisante pour que $\{V_a\}$ puisse être considérée comme une famille de voisinages de a est que $\{V_a\}$ et $\{I_a\}$ soient équivalentes, c'est-à-dire que les deux conditions suivantes soient remplies :

1° Tout V_a contient un I_a.

2° Tout I_a contient un V_a.

La condition 2° est identique à 2). D'autre part, si 1) est réalisée, tout V_a contient un I_a qui est V_a lui-même, donc 1° est vraie. Inversement, si 1° est réalisée, tout V_a contient un ensemble auquel a est intérieur ; or nous avons vu que tout point intérieur à une partie d'un ensemble est intérieur à cet ensemble ; donc a est intérieur à chaque V_a et 1) est vraie. Par conséquent la condition 1) est équivalente à 1°. C. Q. F. D.

On déduit immédiatement de ce théorème les corollaires suivants :

Dans un espace ($\mathfrak{V}$), *chaque point a est intérieur à chacun de ses voisinages.*

Ainsi toute famille de voisinages de a est nécessairement extraite de $\{I_a\}$. On peut donc dire que la famille $\{I_a\}$ des ensembles I_a auxquels a est intérieur, constitue la famille de voisinages de a la plus *riche* possible.

Dans un espace ($\mathfrak{V}$), *la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point a soit intérieur à un ensemble* E *est qu'il existe un voisinage de a appartenant entièrement à* E.

La condition est nécessaire en vertu du théorème démontré à l'instant. Réciproquement, si un voisinage V_a de a appartient à E, a est intérieur à une partie V_a de E, donc a est intérieur à E par conséquent la condition est bien suffisante.

CHAPITRE II

ENSEMBLES OUVERTS ET FERMÉS DANS LES ESPACES $(\mathcal{V})$, LA CONDITION α)

Notre principal but dans ce Chapitre est d'introduire une condition que nous appellerons la condition α) et dont la réalisation apporte d'importantes simplifications aux propriétés des espaces $(\mathcal{V})$.

§ I. **Quelques définitions dans un espace $(\mathcal{V})$.** — Nous adoptons dans un espace $(\mathcal{V})$ les définitions suivantes qui généralisent d'une manière naturelle les définitions usitées dans l'espace euclidien.

a) Un ensemble E est *fermé* si $E' \subset E$. Cette définition implique que l'espace entier et l'ensemble vide sont fermés.

b) L'*ensemble de fermeture* d'un ensemble E est

$$\overline{E} = E + E'.$$

c) Nous avons déjà défini la notion d'*intérieur*. Un point *a* est *intérieur* à un ensemble E s'il existe un voisinage de *a* appartenant entièrement à E (Chapitre I, § X).

Nous avons vu que dans un espace topologique vérifiant 1° de F. Riesz, c'est-à-dire dans un espace $(\mathcal{V})$, on avait l'identité

$$(\text{intérieur de } E) = E - [C(E)]',$$

d'où résulte l'identité

$$C(\text{intérieur de } E) = C(E) + [C(E)]' = \overline{C(E)}.$$

d) Un ensemble E est *ouvert* si

$$E = \text{intérieur de } E.$$

Cette définition implique que l'espace entier et l'ensemble vide sont ouverts. On peut dire aussi qu'un ensemble E est *ouvert* si

chaque point de E est intérieur à E, autrement dit si, pour chaque point a de E, il existe un voisinage de a appartenant entièrement à E.

La relation

$$\mathrm{E} = \text{intérieur de } \mathrm{E}$$

équivaut à

$$\mathrm{C(E)} = \overline{\mathrm{C(E)}},$$

c'est-à-dire à

$$[\mathrm{C(E)}]' \subset \mathrm{C(E)}.$$

Par conséquent, dans un espace ($\mathcal{V}$), *le complémentaire d'un ensemble ouvert est un ensemble fermé et réciproquement.*

e) Un point est *extérieur* à un ensemble E s'il est intérieur à C(E). On a l'identité

$$(\text{extérieur de } \mathrm{E}) = \mathrm{C(E)} - \mathrm{E}' = \mathrm{C}(\overline{\mathrm{E}}).$$

f) Un point est *frontière* d'un ensemble E, et aussi de C(E), s'il n'est ni intérieur ni extérieur à E.

Il est équivalent de dire qu'un point a est frontière de E, ou appartient à la *frontière* de E, si chaque voisinage de a contient au moins un point de E et au moins un point de C(E). On a l'identité

$$\begin{aligned}(\text{frontière de } \mathrm{E}) &= \mathrm{C}(\text{intérieur de } \mathrm{E}) \cdot \mathrm{C}(\text{extérieur de } \mathrm{E}) \\ &= \overline{\mathrm{E}} \cdot \overline{\mathrm{C(E)}} = \mathrm{E} \cdot [\mathrm{C(E)}]' + \mathrm{E}' \cdot \mathrm{C(E)}.\end{aligned}$$

§ II. **Sommes d'ensembles ouverts.** — *Théorème.* — *Dans un espace* ($\mathcal{V}$) *toute somme d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.*

En effet soient O des ensembles ouverts et soit S leur somme

$$\mathrm{S} = \Sigma \mathrm{O}.$$

Soit a un point quelconque de S ; a appartient à un O ; donc a est intérieur à cet O ; or nous savons que tout point intérieur à une partie d'un ensemble est intérieur à cet ensemble ; donc a est intérieur à S. Par conséquent S est ouvert. C. Q. F. D.

Application : Soit E un ensemble quelconque de points d'un espace ($\mathcal{V}$). La somme O de tous les sous-ensembles ouverts de E est un ensemble ouvert qui peut être vide ; nous poserons

$$\mathrm{O} = \text{le plus grand sous-ensemble ouvert de } \mathrm{E}.$$

Tout point de O est intérieur à O et par conséquent intérieur à E ; on a donc

$$O \subset \text{intérieur de } E \subset E.$$

Par conséquent la condition nécessaire et suffisante pour que

$$O = \text{intérieur de } E$$

est que l'intérieur de E soit ouvert.

§ III. **Produits d'ensembles fermés.** — *Théorème. — Dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *tout produit d'ensembles fermés est un ensemble fermé.*

Nous allons déduire cette proposition du théorème analogue du § II en nous servant des complémentaires. Soient F des ensembles fermés et $\mathfrak{F}$ leur produit. Comme le complémentaire d'un produit est la somme des complémentaires des facteurs, nous avons

$$C(\mathfrak{F}) = \Sigma C(F).$$

Les C(F) sont ouverts comme complémentaires d'ensembles fermés ; donc $C(\mathfrak{F})$ est ouvert en vertu du théorème du § II, donc $\mathfrak{F}$ est fermé. C. Q. F. D.

Application : Soit E un ensemble quelconque de points d'un espace ($\mathfrak{V}$). Le produit F de tous les ensembles fermés contenant E est un ensemble fermé contenant E. Nous poserons

$$F = \text{le plus petit ensemble fermé contenant } E.$$

On a, en tenant compte de la condition 1° de F. Riesz,

$$F \supset F' \supset E'.$$

D'où

$$F \supset \overline{E}.$$

On en déduit que la condition nécessaire et suffisante pour que $F = \overline{E}$ est que $\overline{E}$ soit fermé.

§ IV. **La condition** α). — Nous appellerons ainsi la condition suivante susceptible d'être imposée à l'opération de dérivation dans un espace ($\mathfrak{V}$) :

α) *Tout ensemble de fermeture* $\overline{E} = E + E'$ *est fermé.*

Il serait facile de constater que l'espace euclidien et presque tous les espaces abstraits importants étudiés jusqu'à ce jour (espaces accessibles de M. Fréchets, espaces de Hausdorff, espaces distan-

ciés etc.), sont des espaces ($\mathcal{V}$) vérifiant α). Nous verrons que les espaces ($\mathcal{V}$) vérifiant α) jouissent de propriétés particulièrement simples et élégantes et qu'on peut leur étendre un grand nombre de propriétés d'espaces moins généraux.

Tenant compte de nos définitions ainsi que du résultat obtenu à la fin du § III nous voyons que * *la condition α) équivaut, dans un espace* ($\mathcal{V}$), *à l'une quelconque des deux identités suivantes conçues comme ayant lieu quel que soit l'ensemble* E :

$$\bar{\bar{E}} = \bar{E}.$$

$\bar{E}$ = le plus petit ensemble fermé contenant E.

Remarquons encore que, dans un espace ($\mathcal{V}$) vérifiant α), la frontière d'un ensemble E peut se mettre sous la forme d'un produit de deux ensembles fermés (§ I, *f*).

Par conséquent, * *dans un espace* ($\mathcal{V}$) *vérifiant* α), *la frontière d'un ensemble quelconque est un ensemble fermé.*

§ V. **La condition** α_1). — Tenant compte de l'identité suivante obtenue plus haut dans un espace ($\mathcal{V}$) :

$$C(\text{intérieur de } E) = \overline{C(E)},$$

et tenant compte du fait que, dans un espace ($\mathcal{V}$), le complémentaire d'un ensemble ouvert est un ensemble fermé et réciproquement, nous voyons que :

* *Dans l'espace* ($\mathcal{V}$) *le plus général la condition* α) *est équivalente à la suivante :*

α_1). *L'intérieur d'un ensemble quelconque est ouvert.*

Cette condition α_1) peut s'exprimer par l'identité :

$$(\text{intérieur de } E) = \text{intérieur de l'intérieur de } E.$$

En vertu du résultat obtenu à la fin du § II, nous voyons aussi que, * *dans un espace* ($\mathcal{V}$), *la condition* α_1) [*et par conséquent la condition* α)] *équivaut à l'identité suivante* :

$$(\text{intérieur de } E) = \text{le plus grand sous-ensemble ouvert de } E.$$

§ VI. **La condition** α_2). — Nous appellerons ainsi la condition suivante qui porte directement sur les familles de voisinages :

α_2) *Pour tout point a et tout voisinage* V_a *de a, il existe un voisinage* W_a *de a tel que, pour tout point b de* W_a, *il existe un voisinage* V_b *de b appartenant entièrement à* V_a.

Dans cette condition chaque point appartient par hypothèse à tous ses voisinages, comme nous le supposons toujours (1). L'intérêt de cette condition α_2) provient du fait que, dans l'espace ($\mathfrak{V}$) le plus général, elle est équivalente à α). Cette équivalence sera démontrée au § suivant.

Remarque. — Tenons compte du fait que, dans un espace ($\mathfrak{V}$), un point a est intérieur à un ensemble E s'il existe un voisinage de a appartenant entièrement à E ; nous voyons alors que la condition α_2) peut se mettre successivement sous les deux formes suivantes qui lui sont équivalentes dans un espace ($\mathfrak{V}$) :

Pour tout point a et tout voisinage V_a de a, il existe un voisinage W_a de a tel que

$$W_a \subset \text{intérieur de } V_a.$$

Ou finalement :

Pour tout point a et tout voisinage V_a de a on a :

$$a \in \text{intérieur de l'intérieur de } V_a.$$

§ VII. * **Équivalence de α) et de α_2) dans un espace ($\mathfrak{V}$).** — *Théorème.* — Dans un espace ($\mathfrak{V}$) où l'intérieur d'un ensemble quelconque est ouvert, les familles de voisinages vérifient nécessairement α_2).

En effet, considérons un espace ($\mathfrak{V}$) où l'intérieur d'un ensemble quelconque est ouvert, et soient, dans cet espace, un point a et un voisinage V_a de a. Alors l'intérieur de V_a est ouvert. D'autre part, dans un espace ($\mathfrak{V}$), chaque point est intérieur à chacun de ses voisinages. On a donc :

$$a \in \text{intérieur de } V_a = \text{intérieur de l'intérieur de } V_a.$$

Par conséquent les familles de voisinages vérifient α_2).

C. Q. F. D.

Théorème réciproque. — Dans un espace ($\mathfrak{V}$) où les familles de voisinages adoptées vérifient α_2), l'intérieur d'un ensemble quelconque est ouvert.

En effet, soit un espace ($\mathfrak{V}$) où les familles de voisinages adoptées vérifient α_2), et soit un ensemble quelconque E de points de cet espace. Nous avons deux cas possibles :

---

(1) Cette condition (α_2) avait été considérée par M. Fréchet (E. A., p. 184).

1° *cas*. L'intérieur de E est vide.

Alors l'intérieur de E est ouvert.

2° *cas*. L'intérieur de E n'est pas vide.

Soit alors a un point quelconque de l'intérieur de E. Il existe un voisinage V_a de a tel que

$$V_a \subset E.$$

Or nous savons que tout point intérieur à une partie d'un ensemble est intérieur à cet ensemble ; on a donc :

$$\text{intérieur de } V_a \subset \text{intérieur de } E,$$
$$\text{intérieur de l'intérieur de } V_a \subset \text{intérieur de l'intérieur de } E.$$

En vertu de α_2) on a

$$a \in \text{intérieur de l'intérieur de } V_a,$$

d'où

$$a \in \text{intérieur de l'intérieur de } E.$$

Donc l'intérieur de E est ouvert.

C. Q. F. D.

On peut condenser en un seul énoncé les deux théorèmes précédents en disant que, *dans un espace ($\mathfrak{V}$), la condition α_2) équivaut à la condition α_1). Nous avons donc le théorème suivant :

** *Dans l'espace* ($\mathfrak{V}$) *le plus général les trois conditions* α), α_1), α_2) *sont entièrement équivalentes.*

Autrement dit, tout espace ($\mathfrak{V}$) satisfaisant à l'une quelconque de ces trois conditions, satisfait nécessairement aux deux autres.

Remarque. — Nous venons de démontrer l'équivalence de la condition α) qui porte directement sur l'opération de dérivation, et de la condition α_2) qui porte directement sur les familles de voisinages. Si donc α_2) est vérifiée pour un certain choix des familles de voisinages, α_2) ne cessera pas d'être vérifiée si l'on remplace ces familles par des familles équivalentes relativement à l'opération de dérivation.

§ VIII. **Le problème de M. Tumarkin.** — Ce problème consiste dans la question suivante :

A quelle condition l'opération de dérivation dans un espace ($\mathfrak{V}$) doit-elle satisfaire pour que l'*on puisse y adopter des familles de voisinages exclusivement constituées par des ensembles ouverts ?*

M. TUMARKIN [1] a démontré que *les espaces* $(\mathcal{V})$ *satisfaisant à cette condition sont ceux qui vérifient* α).

Le résultat précédent est une conséquence des deux théorèmes suivants :

Théorème. — Si dans un espace $(\mathcal{V})$ on peut adopter des familles de voisinages exclusivement formées d'ensembles ouverts, cet espace $(\mathcal{V})$ vérifie α).

En effet adoptons dans cet espace $(\mathcal{V})$ des voisinages qui soient tous ouverts, et considérons alors dans cet espace un point a et un voisinage V_a de a. Nous pouvons écrire :

$$a \in V_a = (\text{intérieur de } V_a) = \text{intérieur de l'intérieur de } V_a.$$

Donc les voisinages adoptés vérifient α_2) ; donc notre espace $(\mathcal{V})$ vérifie α).

C. Q. F. D.

* *Théorème réciproque. — Soit un espace* $(\mathcal{V})$ *vérifiant* α), *et soient, dans cet espace, un point* a *et une famille admissible* $\{V_a\}$ *de voisinages* V_a *de* a ; *on peut alors prendre comme famille de voisinages de* a *équivalente à la précédente, la famille* $\{\mathcal{V}_a\}$ *des ensembles*

$$\mathcal{V}_a = \text{intérieur de } V_a$$

et les $\mathcal{V}_a$ *sont tous ouverts.*

En effet tout d'abord, puisque α) équivaut à α_1), les $\mathcal{V}_a$ sont tous ouverts. Il nous reste donc à démontrer l'équivalence des deux familles $\{V_a\}$ et $\{\mathcal{V}_a\}$, et pour cela il nous faut montrer que tout V_a contient un $\mathcal{V}_a$, et que tout $\mathcal{V}_a$ contient un V_a.

D'abord tout V_a contient un $\mathcal{V}_a$ à savoir l'intérieur de V_a.

Réciproquement donnons-nous un

$$\mathcal{V}_a = \text{intérieur de } V_a.$$

Puisque α) équivaut à α_2), la famille $\{V_a\}$ vérifie α_2) ; donc, en vertu de la seconde forme de la condition α_2) donnée au § VI, il existe un voisinage W_a appartenant à la famille $\{V_a\}$ tel que

$$W_a \subset (\text{intérieur de } V_a) = \mathcal{V}_a.$$

Donc tout $\mathcal{V}_a$ contient un ensemble de la famille $\{V_a\}$.

C. Q. F. D.

---

(1) Voir E. A., p. 187.

Le dernier théorème entraîne le corollaire suivant :

* Dans un espace ($\mathfrak{V}$) vérifiant α), la condition nécessaire et suffisante pour qu'un point a soit point d'accumulation d'un ensemble E est que tout voisinage de a contienne *à son intérieur* au moins un point de E distinct de a.

CHAPITRE III

COMPARAISON DE LA CONDITION « TOUT ENSEMBLE DE FERMETURE EST FERMÉ » AVEC LA CONDITION « TOUT ENSEMBLE DÉRIVÉ EST FERMÉ »

§ I. **Les conditions 2° et 3° de F. Riesz.** — Nous appellerons ainsi les conditions suivantes :

2° de F. Riesz. — *Tout point d'accumulation de la somme de deux ensembles est point d'accumulation de l'un au moins de ces deux ensembles.*

3° de F. Riesz. — *Tout ensemble n'ayant qu'un seul élément n'a pas de point d'accumulation.*

Remarquons que l'ensemble des conditions 1° de F. Riesz (définie au Chapitre I) et 2° de F. Riesz équivaut, comme on le voit sans peine, à l'identité

$$(E + F)' = E' + F'.$$

Comme tout espace ($\mathfrak{V}$) vérifie 1° de F. Riesz nous voyons que *la condition 2° de F. Riesz équivaut dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *à l'identité ci-dessus c'est-à-dire à la distributivité de l'opération de dérivation.*

§ II. **La condition** β). — Nous appellerons ainsi la condition suivante [1] :

β) *Tout ensemble dérivé est fermé.*

Cette condition est à rapprocher de notre condition :

α) *Tout ensemble de fermeture est fermé.*

α) et β) sont toutes deux vérifiées dans de nombreux espaces abstraits (espaces euclidiens, espaces distanciés, espaces accessibles). Nous allons démontrer que :

(1) Étudiée par M. Fréchet (E. A., p. 183).

• *Les conditions* α) *et* β) *chevauchent dans l'espace* $(\mathcal{V})$ *le plus général.*

Nous entendons par là qu'un espace $(\mathcal{V})$ peut vérifier α) sans vérifier β), et qu'un espace $(\mathcal{V})$ peut vérifier β) sans vérifier α). Ceci résulte des deux exemples su vants.

§ III. • **Exemple d'un espace** $(\mathcal{V})$ **vérifiant** α) **sans vérifier** β). — Appelons espace $(\ _1)$ un espace $(\mathcal{V})$ formé des points

$$\cdots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$$

où n peut prendre toutes les valeurs entières > 0, < 0 et $= 0$. Pour compléter la définition de l'espace $(\mathcal{E}_1)$ nous attachons à chaque point a_n deux voisinages, l'un $(a_n) + (a_{n-1})$, l'autre $(a_n) + (a_{n+1})$.

On voit sans peine que tous les voisinages adoptés dans l'espace $(\mathcal{E}_1)$ sont des ensembles ouverts. Par conséquent l'espace $(\mathcal{E}_1)$ vérifie α).

Ceci posé, dans l'espace $(\mathcal{E}_1)$, la condition nécessaire et suffisante pour que a_n soit point d'accumulation d'un ensemble E est que E contienne à la fois les deux points a_{n-1} et a_{n+1}. Considérons alors l'ensemble

$$e = (a_1) + (a_3) + (a_5)$$

on a

$$e' = (a_2) + (a_4),$$
$$e'' = (a_3).$$

On n'a pas $e'' \subset e'$, donc e' n'est pas fermé et l'espace $(\mathcal{E}_1)$ ne vérifie pas β).

Remarque. — L'espace $(\mathcal{E}_1)$ vérifie évidemment la condition 3° de F. Riesz, mais il ne vérifie pas la condition 2° ; en effet a_2 par exemple est point d'accumulation de $(a_1) + (a_3)$ sans être point d'accumulation ni de (a_1) ni de (a_3).

§ IV. • **Exemple d'un espace** $(\mathcal{V})$ **vérifiant** β) **sans vérifier** α). — Appelons espace $(\mathcal{E}_2)$ un espace $(\mathcal{V})$ formé des trois points a, b, c et où nous définissons les voisinages de la façon suivante :

nous attribuons à c un seul voisinage $V_c = (c)$,
nous attribuons à b un seul voisinage $V_b = (b) + (c)$
et nous attribuons à a deux voisinages $V_a^1 = (a) + (b)$ et $V_a^2 = (a) + (c)$.

Si alors nous désignons par E un ensemble non vide quelconque de points de l'espace $(\mathcal{E}_2)$, nous n'avons que sept cas possibles :

1)	$E = (a)$,	alors	$E' = 0$,		
2)	$E = (b)$,	alors	$E' = 0$,		
3)	$E = (c)$,	alors	$E' = (b)$,	et	$E'' = 0$,
4)	$E = (a) + (b)$,	alors	$E' = 0$,		
5)	$E = (a) + (c)$,	alors	$E' = (b)$,	et	$E'' = 0$,
6)	$E = (b) + (c)$,	alors	$E' = (a) + (b)$,	et	$E'' = 0$,
7)	$E = (a) + (b) + (c)$,	alors	$E' = (a) + (b)$,	et	$E'' = 0$.

Dans chacun des sept cas ci-dessus, E′ est fermé ; donc l'espace $(\mathcal{E}_2)$ vérifie β).

Par contre on a dans le cas 3)

$$E = (c), \qquad E + E' = (b) + (c), \qquad (E + E')' = (a) + (b),$$

donc, dans ce cas, $E + E'$ n'est pas fermé. Par conséquent l'espace $(\mathcal{E}_2)$ ne vérifie pas α) et ne vérifie donc ni α_1) ni α_2).

§ V. **Cas des espaces $(\mathcal{V})$ vérifiant 2° de F. Riesz.** — Nous allons démontrer que, * *dans un espace $(\mathcal{V})$ vérifiant la condition 2° de F. Riesz, la condition β) entraîne la condition α), mais que α) n'entraîne pas β).* Ceci résulte du théorème et de l'exemple suivants :

* *Théorème.* — Si un espace $(\mathcal{V})$ vérifie 2° et β) il vérifie α).

En effet, soit dans un tel espace un ensemble quelconque E. En vertu de 2° la dérivation est distributive, de sorte que l'on a

$$(E + E')' = E' + E''$$

et on a en vertu de β)

$$E' + E'' = E',$$

d'où

$$(E + E')' \subset E + E'.$$

C. Q. F. D.

Exemple. — Appelons espace $(\mathcal{E}_3)$ un espace $(\mathcal{V})$ dont les points sont les éléments d'un ensemble donné quelconque P (comprenant plus de deux éléments), et où nous attribuons à chaque point a un voisinage unique

$$V_a = P = \text{espace entier.}$$

On vérifie sans peine que cet espace $(\mathcal{E}_3)$ est *un * exemple d'espace $(\mathcal{V})$ vérifiant 2° de F. Riesz et α) sans vérifier β).*

On peut remarquer que l'espace $(\mathcal{E}_3)$ ne vérifie pas 3° de F. Riesz.

§ VI. **Sur un cas d'équivalence de α) et de β).** — THÉORÈME. — *Dans un espace ($\mathfrak{V}$) vérifiant* 2° *et* 3° *de F. Riesz la condition* β) *équivaut à la condition* α) *et par conséquent aussi à* α_1) *et à* α_2).

En vertu des résultats obtenus au § précédent et au Chapitre II il nous suffit de démontrer que, dans un tel espace, α) entraîne β). Soit donc un espace ($\mathfrak{V}$) vérifiant 2°, 3° et α), et soit un ensemble quelconque E de points de cet espace.

On a, en vertu de la condition 1° de F. RIESZ vérifiée par tout espace ($\mathfrak{V}$),

$$E'' \subset (E + E')'$$

et on a, en vertu de α),

$$(E + E')' \subset E + E',$$

d'où

$$E'' \subset E + E'. \tag{1}$$

Soit a un point quelconque de E'' ; nous avons deux cas possibles :

1er *cas* : a n'appartient pas à E.

Alors a appartient nécessairement à E' en vertu de (1).

2e *cas* : a appartient à E.

Posons alors

$$F = E - (a),$$

d'où

$$E = F + (a).$$

En vertu de 2° la dérivation est distributive, de sorte que nous avons

$$E' = F' + (a)'.$$

Or $(a)'$ est vide en vertu de 3°, on a donc

$$E' = F',$$
$$E'' = F''.$$

Ceci posé, la relation (1) a lieu quel que soit l'ensemble E ; donc elle a lieu aussi pour l'ensemble F, autrement dit

$$F'' \subset F + F'.$$

Or le point a appartient à $E'' = F''$, et le point a n'appartient

pas à F ; donc le point a appartient à $F' = E'$. Ainsi dans le 2e cas comme dans le 1er cas le point a appartient à E' ; donc $E'' \subset E'$.

C. Q. F. D. (1)

§ VII. **Sur diverses classes d'espaces** ($\mathcal{V}$). — M. FRÉCHET a appelé *espaces accessibles* (2) les espaces ($\mathcal{V}$) vérifiant les conditions 2° et 3° de F. RIESZ et la condition β).

D'après le théorème précédent on voit que l'on obtient une définition équivalente à la précédente en y remplaçant la condition β) par la condition α) sous l'une quelconque de ses formes.

La suite de cet ouvrage nous permettra de constater que presque toutes les propriétés importantes des espaces accessibles peuvent s'étendre aux espaces ($\mathcal{V}$) vérifiant seulement les conditions 2° de F. RIESZ et α). Il est donc intéressant de remarquer que l'exemple des espaces ($\mathcal{E}_3$) et ($\mathcal{E}_1$) envisagés plus haut montre que * *la classe des espaces* ($\mathcal{V}$) *vérifiant* 2° *de F. Riesz et* α) *est effectivement plus générale que celle des espaces accessibles mais effectivement moins générale que celle des espaces* ($\mathcal{V}$) *vérifiant* α).

(1) On doit à M. FRÉCHET la démonstration de l'équivalence des conditions β) et α_2) dans le cas d'un espace ($\mathcal{V}$) vérifiant 2° et 3° (« Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits » *Bull. Sc. math.*, t. XLII, 1918, p. 138-156). On lui doit aussi une démonstration directe de l'équivalence de β) et de α_1) dans le même cas (« *American journ. of math.* » vol. L, janvier 1928, p. 59).

(2) E. A., p. 185.

CHAPITRE IV

ÉTUDE DE LA DEUXIEME CONDITION DE F. RIESZ

Notre principal objet dans ce Chapitre est de mettre la condition 2° de F. Riesz sous diverses formes intéressantes en elles-mêmes et dont plusieurs seront utilisées ultérieurement.

§ I. **La condition 2°.** — Nous avons vu au début du Chapitre précédent que la condition 2° de F. Riesz à savoir :

2° *Tout point d'accumulation de la somme de deux ensembles est point d'accumulation de l'un au moins de ces deux ensembles.*

Équivaut, dans un espace $(\mathfrak{V})$, à l'identité suivante

$$(E + F)' = E' + F',$$

c'est-à-dire à la *distributivité de l'opération de dérivation.*

§ II. **La condition $(2°)_1$.** — Nous allons démontrer que, *dans un espace $(\mathfrak{V})$, la condition 2° de F. Riesz équivaut à la suivante :*

$(2°)_1$. *L'opération de fermeture est distributive, autrement dit on a l'identité*

$$\overline{E + F} = \overline{E} + \overline{F}. \tag{1}$$

En effet, considérons d'abord un espace $(\mathfrak{V})$ vérifiant 2°. Dans un tel espace on a l'identité

$$(E + F)' = E' + F',$$

d'où résulte évidemment l'identité (1).

Réciproquement considérons un espace $(\mathfrak{V})$ où la relation (1) a lieu quels que soient les ensembles E et F. Soit alors a un point quelconque de $(E + F)'$, nous poserons

$$e = E - (a), \qquad f = F - (a).$$

Par hypothèse la relation (1) est vérifiée aussi pour e et f, autrement dit :

$$e + f + (e + f)' = (e + e') + (f + f'). \tag{2}$$

Tenant compte de la condition b) imposée par nous au Chapitre I à tout espace topologique (et qui est vérifiée dans tout espace $(\mathfrak{V})$), nous voyons que $a \in (e + f)'$; or a n'appartient ni à e ni à f ; donc, en vertu de (2), $a \in e' + f'$. Si nous tenons encore compte de la condition b), nous voyons que $a \in E' + F'$. Donc

$$(E + F)' \subset E' + F'.$$

Donc notre espace $(\mathfrak{V})$ vérifie la condition 2°.

C. Q. F. D.

§ III. **La condition** $(2^o)_2$. — Nous venons de voir que, dans un espace $(\mathfrak{V})$, la condition 2° de F. Riesz équivaut à l'identité

$$\overline{E + F} = \overline{E} + \overline{F}. \tag{1}$$

Remplaçons, dans cette identité, E par C (E) et F par C (F) ; l'identité (1) devient

$$\overline{C(EF)} = \overline{C(E)} + \overline{C(F)}. \tag{1)'$$

Ceci posé, rappelons l'identité vraie dans tout espace $(\mathfrak{V})$ et qui nous a servi si souvent :

$$C(\text{intérieur de } E) = \overline{C(E)}.$$

Tenant compte de cette identité, (1)' devient :

$$C(\text{intérieur de } EF) = C(\text{intérieur de } E) + C(\text{intérieur de } F),$$

ou bien :

$$(\text{intérieur de } EF) = (\text{intérieur de } E)(\text{intérieur de } F) \tag{3}$$

Nous concluons de là que la condition 2° de F. Riesz équivaut, dans un espace $(\mathfrak{V})$, à l'identité (3). Autrement dit, * *la condition 2° de F. Riesz équivaut, dans un espace* $(\mathfrak{V})$, *à la suivante* :

$(2^o)_2$. *L'intérieur de tout produit de deux ensembles est le produit des intérieurs de ces deux ensembles.*

On obtient évidemment une condition équivalente à $(2^o)_2$ en y remplaçant les mots « deux ensembles » par les mots « nombre fini d'ensembles ».

§ IV. **La condition** $(2^o)_3$. — Nous allons démontrer que, *dans un espace* $(\mathfrak{V})$, *la condition* 2° *de F. Riesz équivaut à la suivante* [1] :

$(2^o)_3$. *Pour tout point* a *et tous voisinages* V_a *et* W_a *de* a, *il existe au moins un voisinage de* a *appartenant entièrement à la fois à* V_a *et* W_a.

Démonstration. — Il nous suffit de démontrer l'équivalence, dans un espace $(\mathfrak{V})$, des conditions $(2^o)_2$ et $(2^o)_3$.

1) Considérons d'abord un espace $(\mathfrak{V})$ vérifiant $(2^o)_2$. On a dans un tel espace pour tout point a et tous voisinages V_a et W_a de a :

$$(\text{intérieur de } V_aW_a) = (\text{intérieur de } V_a)(\text{intérieur de } W_a).$$

Comme, dans un espace $(\mathfrak{V})$, chaque point est intérieur à chacun de ses voisinages, a est intérieur à la fois à V_a et à W_a ; donc

$$a \in \text{intérieur de } V_aW_a.$$

Donc il existe un voisinage de a appartenant entièrement au produit $V_a W_a$; autrement dit notre espace $(\mathfrak{V})$ vérifie $(2^o)_3$.

2) Réciproquement considérons un espace $(\mathfrak{V})$ où les familles de voisinages adoptées vérifient $(2^o)_3$. Soient alors, dans cet espace, deux ensembles quelconques E et F, et soit a un point arbitraire du produit

$$(\text{intérieur de E})\ (\text{intérieur de F}).$$

Alors il existe deux voisinages V_a et W_a de a tels que

$$V_a \subset E \quad \text{et} \quad W_a \subset F.$$

En vertu de $(2^o)_3$ il existe un voisinage $\mathfrak{V}_a$ de a tel que

$$\mathfrak{V}_a \subset V_aW_a \subset EF,$$

donc a est intérieur à EF ; par conséquent :

$$(\text{intérieur de E})(\text{intérieur de F}) \subset \text{intérieur de EF}.$$

Or nous savons que, dans un espace $(\mathfrak{V})$, tout point intérieur à une partie d'un ensemble est intérieur à cet ensemble ; nous avons donc aussi :

$$(\text{intérieur de EF}) \subset (\text{intérieur de E})\ (\text{intérieur de F}).$$

---

(1) Cette forme de la condition 2° de F. Riesz a été obtenue par M. Fréchet (« Sur la notion de voisinage dans les ensembles abstraits » *Bull. sc. math.*, t. XLII, 1918, p. 138-156.)

D'où finalement :

$$(\text{intérieur de EF}) = (\text{intérieur de E})\,(\text{intérieur de F}).$$

Nous en concluons que, dans un espace $(\mathcal{V})$, $(2^o)_3$ entraîne $(2^o)_2$.

C. Q. F. D.

§ V. **La condition $(2^o)_4$.** — Nous allons donner à la condition 2° de F. Riesz une cinquième forme qui est en relation intime avec la « propriété de Hedrick généralisée » dont nous nous occuperons plus loin. Cette forme est la suivante :

$(2^o)_4$. *Si a est point d'accumulation d'un ensemble* F, *et si a est en même temps intérieur à un ensemble* E, *alors a est point d'accumulation du produit* FE.

Nous allons démontrer que, * *dans un espace* $(\mathcal{V})$, *les conditions* 2° *de F. Riesz et* $(2^o)_4$ *sont équivalentes.*

En effet considérons d'abord un espace $(\mathcal{V})$ vérifiant 2°, et soient, dans cet espace, deux ensembles quelconques E et F. On a

$$F = FE + FC(E).$$

D'où en vertu de 2°

$$F' \subset (FE)' + [FC(E)]'.$$

Soit alors a un point appartenant à la fois à F' et à l'intérieur de E ; a n'est pas point d'accumulation de FC (E), et par conséquent, en vertu de la relation ci-dessus, on peut écrire :

$$a \in (FE)'.$$

Nous avons donc démontré que, dans un espace $(\mathcal{V})$, 2° entraîne $(2^o)_4$.

Réciproquement, considérons un espace $(\mathcal{V})$ vérifiant $(2^o)_4$. Par hypothèse on a dans un tel espace, quels que soient les ensembles E et F :

$$(1) \qquad F' \cdot (\text{intérieur de E}) \subset (FE)'.$$

Soient, dans cet espace, deux ensembles quelconques A et B ; posons :

$$F = A + B, \qquad E = C(A).$$

La relation (1) devient :

$$(A + B)' \cdot C(A + A') \subset [BC(A)]'.$$

On en déduit en tenant compte de la condition 1° de F. Riesz :

$$(A + B)' \cdot C(A + A') \subset B'$$

d'où

$$(A + B)' \subset A + A' + B'. \tag{2}$$

Ceci posé, soit x un point quelconque de $(A + B)'$, posons

$$A_1 = A - (x).$$

Comme la relation (2) a lieu quels que soient les ensembles A et B, on peut écrire :

$$(A_1 + B)' \subset A_1 + A'_1 + B'.$$

En vertu de la condition b) imposée à tout espace topologique on a $x \in (A_1 + B)'$, et comme x n'appartient pas à A_1, on a $x \in A_1' + B'$. Tenant encore compte de la condition b), nous voyons que $x \in A' + B'$. D'où finalement

$$(A + B)' \subset A' + B'.$$

Nous avons donc démontré que, dans un espace $(\mathcal{V})$, $(2°)_4$ entraîne 2°.

C. Q. F. D.

On peut résumer les résultats obtenus depuis le début de ce Chapitre en disant que, *dans un espace* $(\mathcal{V})$, *les cinq conditions* 2°, $(2°)_1$, $(2°)_2$, $(2°)_3$ *et* $(2°)_4$ *sont équivalentes.*

§ VI. **La propriété de Hedrick généralisée.** — On peut envisager une condition distincte de la condition $(2°)_4$ mais de forme analogue en adoptant [1] la définition suivante :

Un espace $(\mathcal{V})$ possède la *propriété de Hedrick généralisée* si, pour tous les sous-ensembles E et F de cet espace, on a la relation suivante :

$$F' \cdot (\text{intérieur de } E) \subset [F \cdot (\text{intérieur de } E)]'.$$

Le principal intérêt de la propriété de Hedrick généralisée consiste, nous semble-t-il, en ceci que cette propriété permet de caractériser l'importante classe des espaces $(\mathcal{V})$ vérifiant à la fois les conditions 2° de F. Riesz et α). Nous allons en effet démontrer le théorème suivant :

---

[1] Avec M. Fréchet E. A., p. 211-212.

* *Dans un espace* ($\mathcal{V}$) *la propriété de Hedrick généralisée équivaut à l'ensemble des conditions* 2° *de F. Riesz et* α).

En effet considérons d'abord un espace ($\mathcal{V}$) vérifiant 2° et α). Dans cet espace $(2°)_4$ est vérifiée, autrement dit on a quels que soient les ensembles E et F :

$$F' \cdot (\text{intérieur de } E) \subset (F \cdot E)'.$$

En vertu de α) l'intérieur de E est ouvert, autrement dit :

$$(\text{intérieur de } E) = \text{intérieur de l'intérieur de } E.$$

Ceci posé, remplaçons dans (1) E par l'intérieur de E ; (1) étant vraie quel que soit E ne cessera pas d'être vraie ; on a donc :

$$F' \cdot (\text{intérieur de } E) \subset [F \cdot (\text{intérieur de } E)]'. \tag{2}$$

Nous avons donc démontré qu'un espace ($\mathcal{V}$) vérifiant 2° et α) vérifie nécessairement la propriété de Hedrick généralisée.

Réciproquement considérons un espace ($\mathcal{V}$) vérifiant la propriété de Hedrick généralisée. Dans cet espace on a par hypothèse la relation (2) ci-dessus quels que soient les ensembles E et F ; on en déduit en tenant compte de la condition 1° de F. Riesz :

$$F' \cdot (\text{intérieur de } E) \subset (F \cdot E)',$$

autrement dit notre espace ($\mathcal{V}$) vérifie $(2°)_4$ et par conséquent 2°. D'autre part faisons dans (2)

$$F = C(\text{intérieur de } E).$$

(2) devient

$$[C(\text{intérieur de } E)]' \cdot (\text{intérieur de } E) = 0.$$

L'intérieur de E est donc ouvert et par conséquent notre espace ($\mathcal{V}$) vérifie α). Nous avons donc démontré que, dans un espace ($\mathcal{V}$), la propriété de Hedrick généralisée entraîne les conditions 2° et α).

C. Q. F. D.

§ VII. **Sur deux propriétés des ensembles ouverts et fermés.** — Considérons les deux propriétés suivantes :

p_{I}. Toute somme d'un nombre fini d'ensembles fermés est un ensemble fermé.

p_{II}. Tout produit d'un nombre fini d'ensembles ouverts est un ensemble ouvert.

En prenant les complémentaires on constate sans peine que, dans un espace $(\mathcal{V})$, p_{I} entraîne p_{II} et p_{II} entraîne p_{I}. Autrement dit p_{I} et p_{II} sont équivalentes dans un espace $(\mathcal{V})$. Nous allons démontrer le théorème suivant :

* *Dans un espace $(\mathcal{V})$ vérifiant 2° de F. Riesz les propriétés p_{I} et p_{II} sont vraies.*

En effet, il nous suffit de démontrer que p_{I} est vraie dans le cas de deux ensembles fermés. Soient donc E et F deux ensembles fermés. On a

$$E' \subset E, \qquad F' \subset F$$

et on a en tenant compte de 2° :

$$(E + F)' \subset E' + F' \subset E + F.$$

Donc E + F est fermé

C. Q. F. D.

Première remarque. — Nous allons montrer sur un exemple que * *les propriétés p_{I} et p_{II} ne s'étendent pas à l'espace $(\mathcal{V})$ le plus général.*

Pour cela prenons comme espace $(\mathcal{V})$ l'espace $(\mathcal{E}_1)$ étudié au § III du Chapitre III.

On vérifie de suite que, dans cet espace, les deux ensembles $E = (a_{n-1})$ et $F = (a_{n+1})$ n'ont aucun point d'accumulation et sont par conséquent fermés. Par contre l'ensemble

$$E + F = (a_{n-1}) + (a_{n+1})$$

admet a_n pour point d'accumulation et n'est donc pas fermé. L'espace $(\mathcal{E}_1)$ est donc un espace $(\mathcal{V})$ ne vérifiant pas la propriété p_{I}, et il en résulte que l'espace $(\mathcal{E}_1)$ ne vérifie pas non plus la propriété p_{II}.

Deuxième remarque. — Nous allons montrer sur un exemple que * *les propriétés p_{I} et p_{II} s'étendent cependant à certains espaces $(\mathcal{V})$ ne satisfaisant pas à la condition 2° de F. Riesz.*

Pour cela, appelons espace $(\mathcal{E}_4)$ un espace $(\mathcal{V})$ formé des points $\ldots\ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots\ldots\ldots, a_n, \ldots\ldots\ldots$, n prenant toutes les valeurs entières > 0, $= 0$ et < 0, et où on attribue à chaque point a_n deux voisinages :

$$W^1_{a_n} = (a_n) + (a_{n+1}) + (a_{n+2}),$$
$$W^2_{a_n} = (a_{n-1}) + (a_n) + (a_{n+1}).$$

On voit de suite que ces voisinages ne satisfont pas à la condi-

tion $(2^o)_3$. Donc l'espace $(\mathcal{E}_4)$ ne vérifie pas la condition 2° de F. Riesz.

Nous allons déterminer tous les ensembles ouverts de l'espace $(\mathcal{E}_4)$. Pour cela remarquons que si E est un ensemble ouvert de $(\mathcal{E}_4)$ et si $a_n \in$ E, alors un voisinage de a_n appartient à E, et par conséquent $a_{n+1} \in$ E. Il en résulte que tout ensemble ouvert de l'espace $(\mathcal{E}_4)$ (en dehors de l'espace entier et de l'ensemble vide) est nécessairement de la forme :

$$(1) \qquad \mathrm{E} = (a_n) + (a_{n+1}) + (a_{n+2}) + \cdots + (a_{n+p}) + \cdots$$

p prenant toutes les valeurs entières $\geqslant 0$; et on vérifie de suite que tout ensemble de la forme (1) ci-dessus est ouvert.

Ceci posé, on vérifie immédiatement que le produit d'un nombre fini d'ensembles de la forme (1) ci-dessus est encore de la forme (1). Donc l'espace $(\mathcal{E}_4)$ jouit de la propriété p_{II} et il jouit par conséquent aussi de la propriété p_{I}.

CHAPITRE V

LES ENSEMBLES DENSES EN SOI ET CLAIRSEMÉS DANS LES ESPACES ($\mathcal{V}$)

Dans les quatre Chapitres précédents nous avons défini diverses classes très générales d'espaces abstraits. Nous allons maintenant commencer l'étude systématique des propriétés des ensembles de points de ces espaces. Le principal objet de la suite de ce travail sera d'ailleurs l'étude des ensembles appartenant soit à l'espace ($\mathcal{V}$) le plus général, soit à un espace ($\mathcal{V}$) vérifiant la condition que nous avons appelée α).

Afin de simplifier le langage nous nous soumettrons, jusqu'à la fin de cet ouvrage, à la convention suivante : toutes les fois que nous énoncerons une définition ou un théorème sans indiquer dans l'énoncé même à quel espace cette définition ou ce théorème s'appliquent, *il sera toujours sous-entendu qu'ils s'appliquent à l'espace* ($\mathcal{V}$) *le plus général.* Toutes les fois qu'une définition ou un théorème ne s'appliqueront qu'à un espace ($\mathcal{V}$) particulier, mention en sera faite explicitement dans chaque énoncé.

Pour faciliter la tâche au lecteur nous précisons que nos § seront numérotés comme plus haut avec des chiffres romains : § I, § II,... ; mais que nos théorèmes seront numérotés avec des chiffres arabes : 1), 2), 3),..., le numérotage commençant par 1) au début de chaque Chapitre.

§ I. **Définitions.** — Nous adoptons les définitions suivantes (1) :

Un ensemble E est *dense en soi* s'il appartient à son dérivé E'.

Un ensemble E est *parfait* s'il est fermé et dense en soi, autrement dit s'il est identique à son dérivé.

(1) Admises par M. Fréchet (E. A., p. 174).

Un ensemble E est *clairsemé* s'il ne contient aucun ensemble non vide et dense en soi [1].

§ II. Sur le plus grand sous-ensemble dense en soi d'un ensemble.

1) *Toute somme* S *d'ensembles* E *chacun dense en soi est un ensemble dense en soi.*

En effet soit a un point de S ; alors il existe un E tel que

$$a \in E \subset E'.$$

Or

$$E \subset S,$$

d'où, en vertu de la condition 1° de F. Riesz :

$$E' \subset S',$$

d'où

$$a \in S'.$$

Donc tout point de S appartient à S'.

C. Q. F. D.

Soit alors E un ensemble quelconque de points d'un espace $(\mathcal{V})$; posons :

$$D = \text{somme de tous les ensembles denses en soi appartenant à E.}$$

En vertu de 1), D, qui peut être vide, est un ensemble dense en soi appartenant à E. Nous dirons avec M. Hausdorff et M. Fréchet que D est *le plus grand sous-ensemble dense en soi de* E.

On a, en tenant compte de 1° de F. Riesz :

$$D \subset D' \subset E',$$

d'où

$$D \subset EE'.$$

Si EE' est dense en soi, ce qui n'a même pas lieu pour tout ensemble linéaire, on a D = EE'. Dans le cas contraire D n'est qu'une partie de EE'.

Nous avons les deux théorèmes suivants [2] :

---

(1) Cette définition des ensembles clairsemés coïncide avec la définition des « separierte Mengen » de G. Cantor et avec celle des « zerstreute Mengen » de M. Hausdorff ; mais le nom d'ensemble « clairsemé » est dû à M. Denjoy.

(2) Les théorèmes 2) et 3) sont dus, dans l'espace $(\mathcal{V})$ le plus général, à M. Sierpinski et à M. Fréchet (E. A., p. 227).

2) *Tout ensemble* E *est la somme de deux ensembles disjoints, l'un dense en soi et l'autre clairsemé (l'un ou l'autre pouvant être vide).*

On a en effet

$$E = D + (E - D).$$

Si E — D contenait un ensemble non vide H dense en soi, D + H serait dense en soi en vertu de 1) et D ne serait pas le plus grand sous-ensemble dense en soi de E. Donc E — D est clairsemé.

C. Q. F. D.

Supposons E fermé ; on peut alors écrire en tenant compte de 1° de F. Riesz :

$$D \subset D' \subset E' \subset E,$$
$$D' \subset D''.$$

donc D′ est un sous-ensemble dense en soi de E ; donc $D' \subset D$, et par conséquent D est parfait. Nous avons donc la proposition suivante :

3) *Tout ensemble* E *fermé est la somme de deux ensembles disjoints, l'un parfait et l'autre clairsemé (l'un ou l'autre pouvant être vide).*

Remarques sur les théorèmes 2) *et* 3). — Posons E = la droite euclidienne, et soit a un point quelconque de E ; on peut écrire :

$$E = [E - (a)] + (a).$$

E — (a) est dense en soi et (a) est clairsemé. Nous voyons ainsi que, même dans le cas euclidien, il y a en général plus d'une manière de décomposer un ensemble E en une somme de deux ensembles disjoints, l'un dense en soi et l'autre clairsemé ; autrement dit *la décomposition dont l'existence est affirmée par le théorème* 2) *n'est pas en général unique.*

Par contre nous allons voir que, * *dans le cas très général des espaces* ($\mathcal{V}$) *vérifiant* 2° *de F. Riesz, la décomposition dont l'existence est affirmée par le théorème* 3) *est unique.* Ce résultat est une conséquence du théorème suivant :

* 4) *Soit, dans un espace* ($\mathcal{V}$) *vérifiant* 2° *de F. Riesz, un ensemble quelconque* E. *S'il existe une décomposition* E = P + Q, P *étant parfait et* Q *clairsemé (l'un de ces deux ensembles pouvant être vide), alors* P *est nécessairement le plus grand sous-ensemble dense en soi de* E.

Démonstration. — Soit, comme plus haut, D le plus grand sous-ensemble dense en soi de E. On a

$$P \subset D,$$

d'où

$$D = P + (D - P).$$

On peut écrire en tenant compte de 2° de F. Riesz :

$$D - P \subset D \subset D' \subset P' + (D - P)' = P + (D - P)',$$

d'où

$$D - P \subset (D - P)',$$

de plus

$$D - P \subset Q.$$

Si donc D — P n'était pas vide, Q contiendrait l'ensemble D — P non vide et dense en soi contrairement à l'hypothèse. D — P est donc vide et par conséquent P = D.

C. Q. F. D.

§ III. Sur la fermeture d'un ensemble dense en soi.

5) *Si un ensemble* E *est dense en soi, alors* $\overline{E} = E' =$ *un ensemble dense en soi.*

En effet par hypothèse $E \subset E'$, d'où en vertu de la condition 1° de F. Riesz

$$E' \subset E'',$$

donc E' est dense en soi. De plus

$$\overline{E} = E + E' = E'.$$

C. Q. F. D.

Nous déduisons immédiatement de 5) la proposition suivante :

* 6) *Dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant l'une au moins des deux conditions* α) *ou* β) (définie au Chapitre III), *si un ensemble* E *est dense en soi, alors* $\overline{E} = E' =$ *un ensemble parfait.*

§ IV. Sur certaines propriétés des espaces denses en soi. — Considérons les deux propriétés suivantes :

p_{III}. Tout point est point d'accumulation de tout ensemble auquel il est intérieur.

p_{IV}. Tout ensemble ouvert est dense en soi.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

* 7). *Dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *dense en soi et vérifiant* 2° *de F. Riesz, les propriétés* p_{III} *et* p_{IV} *sont vraies.*

En effet, en vertu de la forme $(2^o)_4$ de la condition 2° de F. Riesz (Chapitre IV, § V), on a, quels que soient les ensembles E et F, la relation suivante :

$$F' \cdot (\text{intérieur de } E) \subset (FE)'.$$

Faisons F = espace entier ; cette relation devient :

$$(\text{intérieur de } E) \subset E'.$$

Autrement dit p_{III} est vraie, et par conséquent p_{IV} est vraie.

C. Q. F. D.

Remarques. — * *Les propriétés p_{III} et p_{IV} s'étendent à certains espaces ($\mathcal{V}$) denses en soi mais ne vérifiant pas la condition* 2° *de F. Riesz.*

En effet l'espace $(\mathcal{E}_4)$ défini au § VII du Chapitre IV est un espace ($\mathcal{V}$) dense en soi mais ne vérifiant pas 2° ; de plus on voit de suite que dans $(\mathcal{E}_4)$ chaque point est point d'accumulation de chacun de ses voisinages ; donc l'espace $(\mathcal{E}_4)$ vérifie p_{III} et par conséquent p_{IV}.

Mais * *il existe des espaces* ($\mathcal{V}$) *denses en soi où ni p_{III} ni p_{IV} ne sont vérifiées.*

En effet l'espace $(\mathcal{E}_1)$ défini au § III du Chapitre III est un espace ($\mathcal{V}$) dense en soi. Dans cet espace l'ensemble $E = (a_1) + (a_2)$ est ouvert, mais $E' = 0$; par conséquent ni p_{III} ni p_{IV} ne sont vérifiées dans l'espace $(\mathcal{E}_1)$.

Remarquons enfin que dans un espace ($\mathcal{V}$) qui n'est pas dense en soi les propriétés p_{III} et p_{IV} ne peuvent être vérifiées. Nous savons en effet que l'espace entier est un ensemble ouvert c'est-à-dire identique à son intérieur.

CHAPITRE VI

LES PROPRIÉTÉS DE CONNEXION DANS LES ESPACES ($\mathcal{V}$)

Nous étudierons dans ce Chapitre les ensembles bien enchaînés et connexes ainsi que les continus appartenant à un espace ($\mathcal{V}$).

§ I. **Définitions.** — Nous adoptons les définitions suivantes [1] :

Deux ensembles E et F sont *mutuellement enchaînés* si

$$EF' + E'F + E'F' \neq 0.$$

Deux ensembles E et F sont *mutuellement connexes* si

$$EF' + E'F \neq 0.$$

Un ensemble G est *bien enchaîné* si, quels que soient les ensembles E et F non vides, distincts et tels que $G = E + F$, les ensembles E et F sont toujours mutuellement enchaînés.

Un ensemble G est *connexe* si, quels que soient les ensembles E et F non vides, distincts et tels que $G = E + F$, les ensembles E et F sont toujours mutuellement connexes.

Il sera commode, et d'ailleurs compatible avec les définitions précédentes, de considérer comme bien enchaîné et connexe tout ensemble réduit à un seul point.

§ II. **Remarques sur les définitions précédentes.** — Il résulte évidemment de nos définitions que *deux ensembles mutuellement connexes sont mutuellement enchaînés*, et que *tout ensemble connexe est bien enchaîné.* Mais on sait que les réciproques de ces deux propositions n'ont même pas lieu dans l'espace euclidien.

En tenant compte de la condition 1° de F. Riesz on obtient immédiatement la proposition suivante [2] :

---

[1] Qui sont les définitions admises par M. Fréchet (E. A., p. 175).

[2] Parmi les propositions démontrées dans ce Chapitre VI, les théorèmes 1), 2), 3), 6), 10), 23), 24), 25), 26), 30), 32), 33), sont dûs à M. Fréchet dans

1) *Si deux ensembles* e *et* f *sont mutuellement connexes (enchaînés) et si* $e \subset E$ *et* $f \subset F$, *alors* E *et* F *sont aussi mutuellement connexes (enchaînés)* (1).

Démontrons maintenant les propositions suivantes qui nous seront utiles dans la suite :

2) On obtient des définitions *équivalentes* aux définitions, données au § I, d'un ensemble bien enchaîné et d'un ensemble connexe en y remplaçant les mots « ensembles E et F *distincts* » par les mots « ensembles E et F *disjoints.* »

En effet soit G un ensemble tel que, quels que soient les ensembles E et F non vides, disjoints et vérifiant

$$G = E + F,$$

E et F soient toujours mutuellement connexes (enchaînés). Considérons alors une décomposition

$$G = e + f$$

où e et f sont non vides et distincts mais pas nécessairement disjoints. L'un au moins des ensembles e ou f est différent de G ; nous pouvons supposer par exemple que $e \neq G$. Alors

$$G = e + (f - e),$$

e et $(f - e)$ étant non vides et disjoints. Alors, par hypothèse, e et $(f - e)$ sont mutuellement connexes (enchaînés), et, par suite de la proposition 1), il en est de même pour e et f. L'équivalence annoncée en résulte.

C. Q. F. D.

3) *Si tout couple de points d'un ensemble* G *appartient à un sous-ensemble connexe (bien enchaîné) de* G, *alors* G *est connexe (bien enchaîné).*

---

l'espace ($\mathcal{V}$) le plus général. Quelques autres propositions, en particulier 15), 19), 21), 22) et 28), ont été démontrées par M. Fréchet dans le cas des espaces accessibles et seront étendues par nous à des cas effectivement plus généraux. (Pour les résultats obtenus par M. Fréchet, consulter par exemple E.A., p. 175-176, p. 228-229. et p. 243-244).

(1) Dans cet énoncé les parenthèses signifient que l'on a une première proposition vraie en supprimant partout le mot « enchaînés » entre parenthèses, et une deuxième proposition vraie en remplaçant partout dans la première « connexes » par « enchaînés ». Nous emploierons souvent ce procédé des parenthèses pour condenser deux définitions, deux propositions et même deux démonstrations en une seule.

En effet soit $G = E + F$, les ensembles E et F étant non vides et disjoints ; soient de plus a un point de E et b un point de F. Il existe alors un ensemble g connexe (bien enchaîné) contenant a et b et tel que $g \subset G$. On a

$$g = gE + gF,$$

gE et gF étant non vides et disjoints. gE et gF sont donc mutuellement connexes (enchaînés), et il en est de même pour E et F en vertu de 1). Donc G est connexe (bien enchaîné).

C. Q. F. D.

4) *Deux ensembles* E *et* F *fermés et disjoints ne peuvent être ni mutuellement connexes ni mutuellement enchaînés.*

On a en effet :

$$E' \subset E, \qquad F' \subset F, \qquad EF = 0$$

d'où

$$EF' + E'F + E'F' = 0.$$

C. Q. F. D.

5) *Deux ensembles* E *et* F *ouverts et disjoints ne peuvent être mutuellement connexes, mais ils peuvent être mutuellement enchaînés.*

On a en effet $F \subset C(E)$. En vertu de la définition d'un ensemble ouvert, les points de E ne sont points d'accumulation d'aucun sous-ensemble de C (E) ; donc $EF' = 0$. On montrerait de même que $E'F = 0$. Donc E et F ne sont pas mutuellement connexes.

Par contre deux ensembles E et F ouverts et disjoints peuvent être mutuellement enchaînés ; il suffit pour le voir de prendre pour E et F les intérieurs de deux cercles du plan euclidien extérieurs l'un à l'autre et tangents.

C. Q. F. D.

§ III. **Les continus.** — Commençons par démontrer les propositions suivantes :

6) *Il y a identité entre un ensemble fermé bien enchaîné et un ensemble fermé connexe.*

En effet il nous suffit évidemment de démontrer que tout ensemble fermé bien enchaîné est connexe. Soit donc G un ensemble fermé et bien enchaîné, et soit $G = E + F$, les ensembles E et F étant non vides et distincts. On a :

$$EF' + E'F + E'F' \neq 0.$$

Tenant compte de la condition 1° de F. Riesz, nous voyons que :

$$E'F' \subset G' \subset G = E + F.$$

D'où

$$E'F' \subset EF' + E'F.$$

On peut donc écrire

$$EF' + E'F = EF' + E'F + E'F' \neq 0.$$

Donc G est connexe.

C. Q. F. D.

* 7) *Tout ensemble* G *fermé et non connexe est décomposable en une somme de deux ensembles* E *et* F *non vides, fermés et disjoints.*

En effet il existe deux ensembles E et F de somme G, non vides, disjoints et non mutuellement connexes. On a :

$$EF' = 0, \qquad E'F = 0$$

et en vertu de la condition 1° de F. Riesz :

$$E' \subset G' \subset G = E + F$$
$$F' \subset G' \subset G = E + F.$$

D'où

$$E' \subset E$$
$$F' \subset F.$$

C. Q. F. D.

Nous déduisons de 6) et de 7) en tenant compte de 4) le résultat fondamental suivant :

* 8) *Il y a identité entre un ensemble fermé bien enchaîné, un ensemble fermé connexe et un ensemble fermé indécomposable en une somme de deux ensembles non vides, fermés et disjoints.*

Nous appellerons *continu* un ensemble fermé bien enchaînés [1].

D'après le théorème précédent il est équivalent, dans un espace ($\mathfrak{V}$), de définir un *continu* comme un ensemble fermé connexe, ou comme un ensemble fermé indécomposable.......

---

[1] Dans une de nos Notes précédentes (*Comptes rendus de l'Acad. des sc.*, t. CLXXXXVI, p. 1205, séance du 24 avril 1933) nous avions appelé « continu » un ensemble fermé bien enchaîné et *contenant plus d'un point*. Nous croyons devoir supprimer cette dernière restriction qui est une source de complications inutiles.

Application à l'espace entier. — Appliquons les résultats précédents au cas de l'espace $(\mathcal{V})$ tout entier qui, nous le savons, est à la fois ouvert et fermé. En vertu des résultats précédents il est équivalent d'admettre qu'un espace $(\mathcal{V})$ est bien enchaîné, ou bien qu'il est connexe, ou bien qu'il est un continu.

Nous allons démontrer les propositions suivantes :

9) *Tout espace* $(\mathcal{V})$ *qui n'est pas un continu est décomposable en une somme de deux ensembles non vides, disjoints et tous deux à la fois ouverts et fermés.*

En effet tout espace $(\mathcal{V})$ qui n'est pas un continu est décomposable en une somme de deux ensembles E et F non vides, fermés et disjoints ; E et F sont ouverts comme étant chacun le complémentaire d'un ensemble fermé.

C. Q. F. D.

10) *Pour qu'un espace* $(\mathcal{V})$ *soit un continu il faut et il suffit qu'il ne contienne aucun ensemble à la fois ouvert et fermé, en dehors de l'espace entier et de l'ensemble vide.*

En effet, supposons qu'un espace $(\mathcal{V})$ contienne un ensemble E non vide, distinct de l'espace entier et à la fois ouvert et fermé ; alors le complémentaire C (E) de E est aussi non vide et à la fois ouvert et fermé ; E et C (E) ne sont donc pas mutuellement connexes en vertu de 4) ; donc l'espace $(\mathcal{V})$ considéré n'est pas connexe. Notre condition est donc bien nécessaire. D'autre part notre condition est suffisante en vertu de 9).

C. Q. F. D.

§ IV. **Les ensembles ouverts connexes et ouverts bien enchaînés.** — Tout ensemble ouvert connexe est évidemment un ensemble ouvert bien enchaîné. Mais *la réciproque de cette proposition n'a même pas lieu dans le cas euclidien.* Il suffit pour le voir de considérer l'ensemble G somme des intérieurs de deux cercles du plan euclidien extérieurs l'un à l'autre et tangents. Cet ensemble G est ouvert et bien enchaîné mais n'est pas connexe.

Nous allons démontrer les deux propositions suivantes analogues à 7) :

* 11) *Dans un espace* $(\mathcal{V})$ *satisfaisant à la condition* 2° *de F. Riesz tout ensemble* G *ouvert et non connexe est décomposable en une somme de deux ensembles* E *et* F *non vides, ouverts et disjoints.*

En effet il existe deux ensembles E et F de somme G, non vides, disjoints et non mutuellement connexes. On a :

$$C(E) = F + C(G).$$

D'où en tenant compte de la condition 2° de F. Riesz :

$$[C(E)]' \subset F' + [C(G)]'.$$

G étant ouvert, on a

$$[C(G)]' \subset C(G) \subset C(E)\,;$$

de plus on a $EF' = 0$, d'où $F' \subset C(E)$, d'où finalement

$$[C(E)]' \subset C(E).$$

E est donc ouvert, et on montrerait de même que F est ouvert.

C. Q. F. D.

* 12) *Dans un espace* ($\mathcal{V}$) *satisfaisant à la condition* 2° *de F. Riesz, tout ensemble* G *ouvert et non bien enchaîné est décomposable en une somme de deux ensembles* E *et* F *non vides, ouverts, non mutuellement enchaînés et disjoints.*

En effet il existe deux ensembles E et F de somme G, non vides, disjoints et non mutuellement enchaînés. On montrerait de la même manière que pour la proposition 11) que E et F sont ouverts.

C. Q. F. D.

On déduit sans peine des résultats précédents, en tenant compte de 5), les deux théorèmes suivants :

* 13) *Dans un espace* ($\mathcal{V}$) *satisfaisant à la condition* 2° *de F. Riesz il y a identité entre un ensemble ouvert connexe et un ensemble ouvert indécomposable en une somme de deux ensembles non vides, ouverts et disjoints.*

* 14) *Dans un espace* ($\mathcal{V}$) *satisfaisant à la condition* 2° *de F. Riesz il y a identité entre un ensemble ouvert bien enchaîné et un ensemble ouvert indécomposable en une somme de deux ensembles non vides, ouverts, non mutuellement enchaînés et disjoints.*

Remarque. — Les propriétés d'ensembles exprimées par les propositions 11), 12), 13) et 14) ont été démontrées en supposant vérifiée la condition 2° de F. Riesz. Nous allons montrer sur un exemple que * *ces propriétés ne s'étendent pas à l'espace* ($\mathcal{V}$) *le plus général.*

En effet, reprenons l'espace ($\mathcal{E}_1$) envisagé au Chapitre III. Dans

cet espace l'ensemble $G = (a_0) + (a_1)$ est ouvert ; d'autre part les deux ensembles (a_0) et (a_1) ne sont ni mutuellement connexes ni mutuellement enchaînés ; donc G n'est ni connexe ni bien enchaîné. Or il n'y a qu'une manière de décomposer G en une somme de deux ensembles E et F non vides et disjoints, c'est de poser:

$$E = (a_0), \qquad F = (a_1)$$

et E et F ne sont pas ouverts.

C. Q. F. D.

§ V. **Relations entre les propriétés de connexion et la fermeture d'un ensemble.**

* 15) *Si l'ensemble* G *est connexe* (*bien enchaîné*) *et si* $H \subset G'$, *alors* $G + H$ *est aussi connexe* (*bien enchaîné*).

En effet soit $G + H = E + F$, les ensembles E et F étant non vides et disjoints. Nous avons trois cas possibles :

1er *cas* : on a $EG \neq 0$ et $FG \neq 0$.

Alors EG et FG sont deux ensembles à la fois non vides, disjoints et de somme G ; donc EG et FG sont mutuellement connexes (enchaînés). Par conséquent, en vertu du théorème 1), E et F sont aussi mutuellement connexes (enchaînés).

2e *cas* : on a $EG = 0$.

Alors $$E \subset H \subset G'$$
et $$G \subset F,$$
d'où, en tenant compte de la condition 1° de F. Riesz,

$$G' \subset F' ;$$

on en déduit que

$$E \subset F'$$

d'où $$EF' \neq 0$$

donc E et F sont mutuellement connexes et mutuellement enchaînés.

3e *cas* : on a $FG = 0$.

On montrerait comme dans le 2e cas que E et F sont mutuellement connexes et mutuellement enchaînés.

Nous voyons ainsi que, dans tous les cas possibles, E et F sont mutuellement connexes (enchaînés). Donc $G + H$ est connexe (bien enchaîné).

C. Q. F. D.

Le théorème 15) entraîne immédiatement que si un ensemble G est connexe (bien enchaîné), son ensemble de fermeture $\overline{G} = G + G'$ est aussi connexe (bien enchaîné). Nous allons même démontrer le théorème plus précis suivant :

* 16) *Si un ensemble* G *est bien enchaîné, alors* $\overline{G} = G + G'$ *est connexe.*

En effet soit $G + G' = E + F$, les ensembles E et F étant non vides et disjoints. Nous avons trois cas possibles :

1^{er} *cas* : on a $EG \neq 0$ et $FG \neq 0$.

Alors EG et FG sont deux ensembles à la fois non vides, disjoints et de somme G ; donc EG et FG sont mutuellement enchaînés, autrement dit

$$EG(FG)' + (EG)'FG + (EG)'(FG)' \neq 0;$$

d'où, en tenant compte de la condition 1° de F. Riesz,

$$EF' + E'F + E'F'G' \neq 0;$$

or
$$G' \subset E + F$$
d'où
$$E'F'G' \subset EF' + E'F;$$
nous avons donc
$$EF' + E'F \neq 0,$$

autrement dit E et F sont mutuellement connexes.

2^e *cas* : on a $EG = 0$.

Alors
$$E \subset G'$$
et
$$G \subset F,$$
d'où, en tenant compte de la condition 1° de F. Riesz,
$$G' \subset F';$$
on en déduit que
$$E \subset F',$$
d'où
$$EF' \neq 0;$$

donc E et F sont mutuellement connexes.

3^e *cas* : on a $FG = 0$.

On montrerait comme dans le 2^e cas que E et F sont mutuellement connexes.

Nous voyons ainsi que, dans tous les cas possibles, E et F sont mutuellement connexes. Donc $G + G'$ est connexe.

C. Q. F. D.

Il y a lieu de remarquer que cette proposition 16) devient une conséquence immédiate de 15) dans le cas d'un espace ($\mathfrak{V}$) où tout ensemble de fermeture est fermé, c'est-à-dire d'un espace ($\mathfrak{V}$) satisfaisant à la condition α). Nous savons en effet que tout ensemble fermé bien enchaîné est connexe. D'ailleurs 15) entraîne immédiatement que :

* 17) *Dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant la condition* α), *l'ensemble de fermeture d'un ensemble bien enchaîné est un continu.*

Nous allons maintenant démontrer la réciproque suivante de 15), réciproque qui supposera il est vrai, contrairement à 15), la réalisation des conditions 2° de F. Riesz et α) :

* 18) *Dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant les conditions* 2° *de F. Riesz et* α), *si l'ensemble* $G + H$ *est bien enchaîné et si* $H \subset G'$, *alors* G *est bien enchaîné.*

En effet, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned}\overline{G} &= G + G' = G + H + G' \\ &= G + H + (\text{certains points d'accumulation de } G + H);\end{aligned}$$

donc, en vertu de 15), $\overline{G}$ est bien enchaîné. Ceci dit posons $G = E + F$, les ensembles E et F étant non vides et disjoints. On a en vertu de 2° de F. Riesz

$$\overline{G} = \overline{E} + \overline{F}.$$

$\overline{E}$ et $\overline{F}$ ont un point commun, car, dans le cas contraire, $\overline{E}$ et $\overline{F}$ seraient deux ensembles à la fois non vides (puisque E et F sont non vides) disjoints, fermés en vertu de α) et mutuellement enchaînés puisque $\overline{G}$ est bien enchaîné ; et ceci est impossible comme nous l'avons vu au théorème 4). Nous pouvons donc écrire

$$\overline{E}\,\overline{F} = EF + EF' + E'F + E'F' \neq 0,$$

et, comme par hypothèse $EF = 0$, les ensembles E et F sont mutuellement enchaînés ; donc G est bien enchaîné.

C. Q. F. D.

On déduit immédiatement des résultats précédents que :

* 19) *Dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant les conditions* 2° *de F. Riesz et* α), *pour qu'un ensemble soit bien enchaîné il faut et il suffit que son ensemble de fermeture soit bien enchaîné.*

En vertu de la condition α), cette proposition 19) peut se mettre sous la forme suivante :

* 20) *Dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant les conditions* 2° *de F. Riesz et* α), *pour qu'un ensemble soit bien enchaîné il faut et il suffit que son ensemble de fermeture soit un continu.*

Remarque. — Considérons l'espace ($\mathfrak{V}$) formé des quatre points a_1, a_2, a_3, a_4, et où on choisit les voisinages de la façon suivante :

a_1 a pour voisinage unique $(a_1) + (a_2)$,
a_2 a pour voisinage unique $(a_1) + (a_2) + (a_3)$,
a_3 a pour voisinage unique $(a_2) + (a_3) + (a_4)$,
a_4 a pour voisinage unique $(a_3) + (a_4)$.

Cet espace ($\mathfrak{V}$) vérifie la condition 2° de F. Riesz mais ne satisfait pas à α). On vérifie sans peine que, dans cet espace, l'ensemble $G = (a_1) + (a_4)$ n'est pas bien enchaîné, tandis que

$$\overline{G} = (a_1) + (a_2) + (a_3) + (a_4) = \text{espace entier}$$

est bien enchaîné et même connexe. De plus $\overline{G}$ est fermé ; $\overline{G}$ est par conséquent un continu.

Nous voyons ainsi que les conditions suffisantes pour qu'un ensemble soit bien enchaîné, énoncées dans 18), 19) et 20), * *ne sont même pas suffisantes dans tous les espaces* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant la condition* 2° *de F. Riesz.*

§ VI. **Sur quelques propriétés de connexion liées à la condition 3° de F. Riesz.** — Rappelons que la condition 3° de F. Riesz s'énonce de la manière suivante :

3° Tout ensemble réduit à un seul élément a un dérivé vide.

Nous allons démontrer le théorème suivant :

* 21) *Dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant la condition* 3° *de F. Riesz, tout ensemble bien enchaîné et contenant plus d'un point est dense en soi.*

En effet, soit, dans un tel espace, un ensemble G bien enchaîné et contenant plus d'un point. Soit a un point arbitraire de G. Alors (a) et $G - (a)$ sont deux ensembles non vides et mutuellement enchaînés. On a donc, puisque $(a)'$ est vide en vertu de 3°,

$$(a)\,[G - (a)]' \neq 0$$

d'où
$$a \in [G - (a)]' \subset G.$$

On en déduit que $\quad G \subset G' \qquad$ C. Q. F. D.

On déduit immédiatement de 21) la proposition suivante :

* 22) *Dans un espace* ($\mathcal{V}$) *vérifiant la condition* 3° *de F. Riesz, tout continu contenant plus d'un point est parfait.*

Remarque. — Nous allons montrer sur un exemple que * *les propriétés* 21) *et* 22) *ne s'étendent même pas à tous les espaces* ($\mathcal{V}$) *vérifiant les conditions* 2° *de F. Riesz et* α).

En effet considérons l'espace ($\mathcal{V}$) formé des deux points a et b et où on attribue au point a l'unique voisinage $V_a = (a)$, et au point b l'unique voisinage $V_b = (b) + (a)$. Cet espace vérifie les conditions 2° de F. Riesz et α). On constate sans peine que, dans cet espace, l'ensemble

$$P = (a) + (b) = \text{espace entier}$$

est bien enchaîné et est même un continu. Et cependant $P' = (b)$; l'ensemble P n'est donc ni dense en soi ni parfait.

C. Q. F. D.

§ VII. Les sommes d'ensembles connexes et d'ensembles bien enchaînés.

23) *Si* G *et* H *sont deux ensembles chacun connexe* (*bien enchaîné*), *et si de plus* G *et* H *sont soit non disjoints soit mutuellement connexes* (*enchaînés*), *alors* G + H *est connexe* (*bien enchaîné*).

En effet posons $G + H = E + F$, les ensembles E et F étant non vides et disjoints. Nous avons trois cas possibles :

1^er^ *cas* : Nous supposons $EG \neq 0$ et $FG \neq 0$.

Alors EG et FG sont deux ensembles non vides, disjoints et de somme G ; donc EG et FG sont mutuellement connexes (enchaînés) ; par conséquent, en vertu du théorème 1), E et F sont aussi mutuellement connexes (enchaînés).

2^e^ *cas* : Nous supposons $EH \neq 0$ et $FH \neq 0$.

Alors EH et FH sont deux ensembles non vides, disjoints et de somme H ; donc EH et FH sont mutuellement connexes (enchaînés) ; par conséquent E et F sont aussi mutuellement connexes (enchaînés).

3^e^ *cas* : Nous supposons que ni le 1^er^ cas, ni le 2^e^ cas ne soit réalisé. Ce 3^e^ cas se subdivise en quatre autres qui sont les seuls possibles et que nous numéroterons I, II, III et IV :

Cas I : On a $EG = 0$ et $EH = 0$.

Ce cas est irréalisable puisque E est non vide et appartient à G + H.

Cas II : On a FG $= 0$ et FH $= 0$.

Ce cas est irréalisable puisque F est non vide et appartient à G $+$ H.

Cas III : On a EG $= 0$ et FH $= 0$.

Alors
$$E \subset H \subset E$$
$$F \subset G \subset F$$
d'où
$$E = H \quad \text{et} \quad F = G.$$

Ce cas est donc irréalisable si G et H sont non disjoints, puisque E et F ont été supposés disjoints. Si au contraire G et H sont disjoints, ils sont par hypothèse mutuellement connexes (enchaînés) ; donc E et F sont mutuellement connexes (enchaînés).

Cas IV : On a FG $= 0$ et EH $= 0$.

Alors
$$E \subset G \subset E$$
$$F \subset H \subset F$$
d'où
$$E = G \quad \text{et} \quad F = H.$$

Les conclusions sont les mêmes que dans le cas III.

Nous voyons ainsi que, dans tous les cas possibles, E et F sont mutuellement connexes (enchaînés) ; donc G $+$ H est connexe bien enchaîné). C. Q. F. D.

On déduit facilement de 23) le théorème suivant :

24) *Soit* ($\mathcal{F}$) *une famille d'ensembles chacun connexe* (*bien enchaîné*) ; *si deux ensembles quelconques de la famille* ($\mathcal{F}$) *sont toujours soit non disjoints soit mutuellement connexes* (*enchaînés*), *alors la somme* S *des ensembles de la famille* ($\mathcal{F}$) *est connexe* (*bien enchaînée*).

En effet soient a et b deux points quelconques de S. Alors a appartient à un ensemble G de la famille ($\mathcal{F}$), et b appartient à un ensemble H de la famille ($\mathcal{F}$). L'ensemble G $+$ H est connexe (bien enchaîné) en vertu de 23). Ainsi a et b appartiennent toujours à un sous-ensemble connexe (bien enchaîné) de S. Donc, en vertu du théorème 3), S est connexe (bien enchaîné).

C. Q. F. D.

§ VIII. **Les composants d'un ensemble.** — Soit G un ensemble non vide appartenant à un espace ($\mathcal{V}$), et soit a un point de G ; posons :

$g_a =$ somme de tous les sous-ensembles de G qui sont chacun connexe et contiennent chacun le point a.

g_a contient le point a et est connexe en vertu de 24) ; g_a peut d'ailleurs se réduire au seul point a. On peut dire que g_a est le plus grand sous-ensemble de G qui soit connexe et contienne le point a.

Nous dirons avec M. Fréchet [1] qui emprunte lui-même cette définition à M. Hausdorff, que g_a est le *composant* de G relatif au point a de G.

Ceci posé, soient a et b deux points de G, et soient g_a et g_b les composants de G respectivement relatifs à a et b. Nous avons deux cas possibles :

1er *cas* : g_a et g_b ont un point commun.

Alors $g_a + g_b$ est connexe en vertu de 23), et, en vertu de la définition des composants, on a

$$g_a + g_b \subset g_a$$

$$g_a + g_b \subset g_b$$

d'où

$$g_a = g_b.$$

Il en résulte que g_a est le composant de G relatif à n'importe quel point de g_a. *On peut donc parler d'un composant d'un ensemble sans spécifier par rapport à quel point.*

2e *cas* : g_a et g_b sont disjoints.

Alors g_a et g_b ne sont pas mutuellement connexes, car, dans le cas contraire, $g_a + g_b$ serait connexe en vertu de 23), ce qui contredirait à la définition de g_a et de g_b.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

25) *Tout ensemble* G *non vide est la somme de ses composants qui sont des ensembles non vides, chacun connexe, deux à deux disjoints et deux à deux non mutuellement connexes.*

§ IX. Quelques propriétés des composants.

26) *Les composants d'un ensemble fermé sont des continus.*

En effet, soit G un ensemble fermé, soit g un composant de G et soit a un point de g'. On a $g \subset G$, d'où, en tenant compte de la condition 1° de F. Riesz,

$$a \in g' \subset G' \subset G\ ;$$

d'où

$$g + (a) \subset G.$$

(1) E. A., p. 228.

Or $g + (a)$ est connexe en vertu de 23) ; on a donc en vertu de la définition des composants :

$$g + (a) \subset g, \quad \text{c'est-à-dire} \quad a \in g$$

d'où

$$g' \subset g.$$

Donc g est fermé ; et comme g est connexe, g est un continu.

C. Q. F. D.

* 27) *Soient* G *et* g *deux ensembles non vides tels que* $g \subset G$; *si* g *et* $G - g$ *ne sont pas mutuellement connexes et si* g *est connexe, alors* g *est un composant de* G.

En effet, soit a un point de g et soit g_a le composant de G relatif à a. On a

$$g \subset g_a$$

d'où

$$g_a = g + (g_a - g)$$

avec

$$g_a - g \subset G - g.$$

Si on avait $g_a - g \neq 0$, alors g et $g_a - g$ seraient mutuellement connexes puisque leur somme g_a est connexe. Par conséquent, en vertu du théorème 1), g et $G - g$ devraient être aussi mutuellement connexes, contrairement à l'hypothèse.

On a donc nécessairement $g_a - g = 0$, d'où $g = g_a$.

C. Q. F. D.

La réciproque de 27) n'est pas toujours vraie : plus précisément, *si* g *est un composant de* G, *l'ensemble* $G - g$ *étant non vide, il peut cependant arriver que* g *et* $G - g$ *soient mutuellement connexes.* En effet considérons par exemple sur la droite euclidienne l'ensemble G formé du point d'abscisse 0 et des points d'abscisses $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, et appelons g l'ensemble formé du seul point d'abscisse 0. Alors g est un composant de G, et cependant g et $G - g$ sont mutuellement connexes.

§ X. **Sur une réciproque du théorème** 25). — Nous allons utiliser le théorème 27) précédent pour obtenir une proposition fournissant, dans un cas particulier, une réciproque au théorème 25). Pour cela nous démontrerons d'abord le lemme suivant :

Lemme. — Soient, dans un espace $(\mathfrak{V})$ vérifiant 2° de F. Riesz, un ensemble H et une somme

$$S = G_1 + G_2 + \cdots + G_n$$

formée d'un nombre fini d'ensembles. Si S et H sont mutuellement connexes, alors l'un au moins des G_i et H sont mutuellement connexes.

En effet par hypothèse, ou bien un point de S est point d'accumulation de H, et alors ce point appartient à l'un des G_i ; donc ce G_i et H sont mutuellement connexes. Ou bien un point de H est point d'accumulation de S ; alors, en vertu de 2°, ce point est point d'accumulation de l'un des G_i ; donc ce G_i et H sont encore mutuellement connexes.

C. Q. F. D.

Ce lemme étant établi, la proposition que nous avons en vue est la suivante :

• 28). *Soient, dans un espace* ($\mathfrak{V}$) *vérifiant* 2° *de F. Riesz, des ensembles* $G_1, G_2, \ldots, G_n$ *non vides, en nombre fini, chacun connexe, et de plus deux à deux disjoints et deux à deux non mutuellement connexes. Alors les* G_i *sont les composants de la somme*

$$S = G_1 + G_2 + \cdots + G_n.$$

En effet, en vertu du lemme précédent, G_i et $S - G_i$ ne sont pas mutuellement connexes. Puisque G_i est connexe, il en résulte, en vertu de 27), que G_i est un composant de S.

C. Q. F. D.

Même dans un espace accessible, le théorème 28) *précédent ne s'étend pas au cas de la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles* G_i. Nous allons démontrer ce fait au moyen de l'exemple suivant :

Soit P un ensemble infini dénombrable ; nous considérons P comme l'ensemble des points de l'espace que nous allons définir. Nous déterminons l'opération de dérivation $E' = K(E)$ pour les ensembles $E \subset P$ au moyen de la convention suivante :

Si E est fini, on pose $E' = 0$.

Si E est infini, on pose $E' = P$.

Alors on vérifie sans peine que l'opération $E' = K(E)$ satisfait à la condition *b*) imposée par nous à tout espace topologique, aux conditions 1°, 2° et 3° de F. Riesz et à la condition α). Le système (P, K) ainsi défini est donc un espace accessible.

Si nous posons $P = E + F$, les ensembles E et F étant non vides, l'un au moins des deux ensembles E ou F est infini et a pour dérivé P. On a donc nécessairement $EF' + E'F \neq 0$. P est donc connexe ; par conséquent P n'a qu'un seul composant qui est P lui-même. Et cepen-

dant P est décomposable en la somme d'une infinité dénombrable d'ensembles formés chacun d'un seul élément, et ces ensembles sont évidemment chacun connexe, deux à deux disjoints et deux à deux non mutuellement connexes en vertu de 3º de F. Riesz.

C. Q. F. D.

§ XI. **Quelques propriétés de connexion où intervient la notion de frontière.** — Soit E un ensemble de points d'un espace ($\mathcal{V}$) et soit C (E) son complémentaire par rapport à l'espace entier. Posons

$$i = (\text{intérieur de E})$$
$$e = (\text{extérieur de E}) = \text{intérieur de } C(E).$$

On a
$$i \subset E, \qquad e \subset C(E)$$
$$C(i + e) = \text{frontière de E}.$$

Un point de i n'est point d'accumulation d'aucun sous-ensemble de C (E). Donc un point de i n'est point d'accumulation d'aucun sous-ensemble de e. De même un point de e n'est point d'accumulation d'aucun sous-ensemble de i. Il s'ensuit que deux ensembles appartenant l'un à i et l'autre à e ne sont jamais mutuellement connexes. On a en particulier la proposition suivante :

29) *L'intérieur et l'extérieur d'un ensemble ne sont jamais mutuellement connexes.*

Par contre l'intérieur et l'extérieur d'un ensemble peuvent être mutuellement enchaînés comme le montre l'exemple de l'intérieur et de l'extérieur d'un cercle dans le plan euclidien.

Démontrons les théorèmes suivants :

30) *Si un ensemble* G *connexe contient au moins un point d'un ensemble* E *et au moins un point du complémentaire de* E, *alors* G *contient au moins un point de la frontière de* E.

En effet si G ne contenait aucun point de la frontière de E on aurait

$$G = Gi + Ge,$$

Gi et Ge étant deux ensembles non vides, disjoints et non mutuellement connexes, ce qui est impossible puisque G est connexe.

C. Q. F. D.

* 31) *Si l'intérieur d'un ensemble* E *est non vide et connexe, cet intérieur est un composant du complémentaire de la frontière de* E.

En effet on a

$$C(\text{frontière de } E) = i + e.$$

i et e ne sont pas mutuellement connexes et i est connexe ; donc, en vertu de 27), i est un composant de $i + e$.

C. Q. F. D.

Si E est ouvert il coïncide avec son intérieur, et 31) prend la forme plus particulière suivante :

32) *Si* E *est un ensemble non vide, ouvert et connexe, il est un composant du complémentaire de la frontière de* E.

On déduit immédiatement de 32) que :

33) *Tout ensemble ouvert et connexe* E *est bien déterminé quand on en connaît un point a et la frontière.*

On a en effet

$$E = \text{composant relatif à } a \text{ de } C(\text{frontière de } E)$$

C. Q. F. D.

TABLE DES MATIÈRES

TOME I

(1) Le lecteur trouverait p. 22 la définition des espaces accessibles.

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie R. Bussière. — 26-4-1934.

Actualités Scientifiques et Industrielles (suite)

Série 1933 :

52. G. Urbain. La coordination des atomes dans la molécule et la symbolique chimique. Première partie .... 12 fr.
53. G. Urbain. La coordination des atomes dans la molécule et la symbolique chimique. Deuxième partie .... 12 fr.
54. M. Chatelet. Spectres d'absorption visibles et ultra-violets des solutions .... 7 fr.
55. L. Leprince-Ringuet. Les transmutations artificielles : particules alpha, neutrons, protons, rayons cosmiques .... 15 fr.
56. E. Néculcéa, Sur la théorie du rayonnement .... 7 fr.
57. G. Fournier et M. Guillot. Sur l'absorption exponentielle des rayons β du radium E .. 10 fr.
58. Jean Perrin. La recherche scientifique .... 6 fr.
59. L. Brillouin. La diffraction de la lumière par des ultra-sons .... 10 fr.
60. A. Magnan et A. Sainte-Lague. Le vol au point fixe .... 10 fr.
61. M. Prettre. L'inflammation et la combustion explosive en milieu gazeux, 1re partie Hydrogène et oxyde de carbone .... 15 fr.
62. Mme P. Curie. Les rayons α, β, γ, des corps radioactifs en relation avec la structure nucléaire .... 12 fr.
63. H. Mineur. L'Univers en expansion .... 12 fr.
64. T. Cahn. Les phénomènes biologiques dans le cadre des sciences exactes .... 6 fr.
65. A. Magnan et A. Planiol. Sur l'excédent de puissance des oiseaux .... 8 fr.
66. A. Magnan et A. Planiol. Sur l'excédent de puissance des insectes .... 8 fr.
67. J. Trillat. Organisation et principes de l'enseignement en U. R. S. S. .... 12 fr.
68. E. Meyerson. Réel et déterminisme dans la physique quantique .... 10 fr.
69. P. Urbain. Les sciences géologiques et la notion d'état colloïdal .... 18 fr.
70. L. Goldstein. Les théorèmes de conservation dans la théorie des chocs électroniques 9 fr.
71. L. Brillouin. La méthode du champ self-consistant .... 12 fr.
72. E. Cartan. Les espaces métriques fondés sur la notion d'air .... 12 fr.
73. P. Swings. Molécules diatomiques. Etude des termes spectraux .... 12 fr.
74. P. Swings. Spectres moléculaires. Etude des molécules diatomiques .... 14 fr.
75. G. Champetier. La structure de la cellulose dans ses rapports avec la constitution des sucres .... 8 fr.
76. Rudolf Carnap. L'ancienne et la nouvelle logique .... 8 fr.
77. Lucien Godeaux. Questions non résolues de géométrie algébrique .... 8 fr.
78. Vera Dantchakoff. Le devenir du sexe .... 15 fr.

Série 1934 :

79. E. Cartan. Les espaces de Finsler .... 12 fr.
80. P. Delens. La métrique angulaire des espaces de Finsler et la géométrie différentille projective .... 12 fr.
81. E. Dubois. L'effet Volta .... 6 fr.
82. M. A. H. Wilson. The electrical properties of semi conductors and insulators .... 4 fr.
83. E. Keightley-Rideal. On phase boundary potentials .... 4 fr.
84. O. Scarpa. Pile metalliche che funzionano in eccezione alla legge delle tensioni elettriche nei circuiti metallici .... 6 fr.
85. M. Volmer. Das elektrolytische Kristallwachstum .... 4 fr.
86. F. Bloch. Les électrons dans les métaux. Problèmes statiques. Magnétisme .... 5 fr.
87. A. F. Joffé. Conductibilité électrique des isolants solides et des semi-conducteurs .... 10 fr.
88. L. Brillouin. Les électrons dans les métaux du point de vue ondulatoire .... 9 fr.
89. L. Brillouin. Conductibilité électrique et thermique des métaux .... 18 fr.
90. J. Heyrovsky. A polarographic study of the électro-kinetic phenomena of adsorption, electro-reduction and overpotential displayed at the dropping mercury cathode .... 12 fr.
91. R. Audubert. Phénomènes photoélectrochimiques. Action de la lumière sur le potentiel métal-solution .... 8 fr.
92. Gillet et N. Andrault de Langeron. Les colloïdes et la couche de passage .... 10 fr.
93. P. Dutoit. Sur le potentiel métal-solution dans les dissolvants autres que l'eau .... 4 fr.
94. G. Brooks. Laque d'Indochine rhus succedanea, la Laccase et le Laccol .... 18 fr.
95. G. Teissier. Dysharmonies et discontinuités dans la croissance .... 10 fr.
96. V. A. Kostitzin. Symbiose, parasitisme et évolution (étude mathématique) .... 15 fr.
97. P. Frank. Théorie de la connaissance et physique moderne .... 10 fr.
98. P. Suings. La fluorescence des molléculés diatomiques, molécules homopolaires des des groupes. V, VI, VII, du tableau périodique .... 10 fr.
99. P. Swings. La fluorescence des molécules diatomiques, phénomènes complexes .... 10 fr.

Actualités Scientifiques et Industrielles (suite)

Série 1934 (*suite*) :

100. M. Dubuisson. Polarisation et dépolarisation cellulaires .... 12 fr.
101. Perez. Les pagures ou Bernard l'Ermite (un exemple d'adaptation) .... 9 fr.
102. Florkin. Transporteurs d'oxygène .... 12 fr.
103. M. Prenant. Adaptation, écologie et biocœnotique .... 15 fr.
104. S. Veil. Les phénomènes périodiques de la chimie. I. les périodicités de structure. .... 15 fr.
105. M. Prettre. L'inflammation et la combustion explosive en milieu gazeux. 2e partie : les hydrocarbures, étude théorique du phénomène de choc dans les moteurs .... 15 fr.
106. G. Bohn. La cellule et les protozoaires .... 18 fr.
107. J. Ullmo. Les idées d'Eddington sur l'interaction électrique et le nombre 137 .... 7 fr.
108. N. Marinesco. Equilibre de membrane .... 15 fr.
109. H. Hasse. Uber gewisse Ideale in einer einfachen Algebra .... 4 fr.
110. J.-J. Trillat. Les preuves expérimentales de la mécanique ondulatoire, la diffraction des électrons et des particules matérielels .... 12 fr.
111. G. Allard. Mécanique quantique et chimie .... 8 fr.
112. Sir A. Eddington. Sur le problème du déterminisme .... 6 fr.
113. T. Cahn et J. Houget. Biochimie de la contraction musculaire .... 12 fr.
114. J. Dieudonné. Sur quelques propriétés des polynomes .... 6 fr.
115. H. Mineur. Histoire de l'astronomie stellaire jusqu'à l'époque contemporaine .... 15 fr.
116. H. Mineur. Eléments de statistique mathématique applicables à l'étude de l'astronomie stellaire .... 12 fr.
117. L. Gay et P. Jaulmes. Dissociation électrolytique, méthode distillatoire .... 10 fr.
118. L. Gay et P. Jaulmes. Dissociation électrolytique, cryoscopie des électrolytes forts .... 15 fr.
119. V. Dantchakoff. La cellule germinale dans le dynamisme de l'ontogénèse .... 18 fr.
120. G. Bohn. Reproduction, sexualité, hérédité .... 15 fr.
121. E. Darmois. Un nouveau corps simple, le deuterium ou hydrogène lourd .... 7 fr.
122. G. Malfitano et M. Catoire. Les composés micellaires selon la notion de complexité croissante en chimie .... 9 fr.
123. L. Godeaux. Les surfaces algébriques non rationnelles de genres arithmétique et géométrique nuls .... 10 fr.
124. J. Duclaux. L'analyse physico-chimique des fonctions vitales (Introduction du *Traité de Chimie-Physique*, tome I) .... 6 fr.
125. J. Duclaux. Etude de l'eau et des solutions, azéotropisme-démixtion (chapitre I du *Traité de Chimie-Physique*, tome I) .... 17 fr.
126. J. Duclaux. Viscosité (chapitre II du *Traité de Chimie-Physique*, tome I) .... 18 fr.
127. J. Duclaux. Rigidité thixotropie, coacervation (chapitre III du *Traité de Chimie-Physique*, tome I) .... 10 fr.
128. J. Duclaux. Capillarité (chapitre IV du *Traité de Chimie-Physique*, tome I) .... 12 fr.
129. J. Duclaux. Suspensions, émulsions (chapitre V du *Traité de Chimie-Physique*, tome I) 12 fr.
130. Carl Benedicks. Nouveaux résultats expérimentaux sur l'effet électrothermique homogène .... 8 fr.
131. Lothar Nordheim. Die Theorie der thermoelektrischen Effekte .... 6 fr.
132. P. Langevin. La notion de corpuscules et d'atomes .... 12 fr.
133. G. Bohn. Les Invertébrés (Cœlentérés et Vers) .... 15 fr.
134. P. Chouard. La multiplication végétative et le bourgeonnement chez les plantes vasculaires .... 10 fr.
135. Z. M. Pacq. Essai de Classification des Substances Sympathicomimétiques .... 8 fr.
136. Z. M. Bacq. Hormones et Vitamines. Un aspect du problème des quantités infinitésimales en biologie .... 8 fr.
137. Edgar Lederer. Les Carotenoïdes des plantes .... 18 fr.
138. Lucien godeaux. La Théorie des surfaces et l'espace réglé .... 12 fr.
139. Marcel Brelot. Etude des fonctions sousharmoniques au voisinage d'un point ...... 14 fr.
140. J. L. Destouches. Les principes de la mécanique générale .... 15 fr.
141. H. Mineur. Photographie stellaire. Mesure photographique des positions et des magnitudes des étoiles .... 18 fr.
142. René Souèges. L'embryologie végétale, résumé historique, 1re époque : Des origines à Hanstein (1870) .... 12 fr.

Saint-Amand (Cher). — Imprimerie R. Bussière. — 7-5-1934.